

XLIX OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ
ZAWODY III STOPNIA
ZADANIA i ROZWIĄZANIA DLA GRUPY MECHANICZNO-BUDOWLANEJ

Autor: Wojciech Radomski
Koreferent: Maciej Jaworski

Zadanie 1

Fragmencem pewnego remontowanego budynku jest drewniana belka obustronnie zamocowana w dwóch pionowych i równoległych względem siebie ścianach odległych od siebie o l (rys. 1a). Przekrój poprzeczny belki, taki sam na całej jej długości, pokazano na rys. 1b. Wymiary tego przekroju pokazano na rys. 1c.

Podczas prac remontowych wystąpiła potrzeba rozkucia miejsc zamocowania belki i tymczasowego jej podparcia na dwóch podporach (rys. 1d). Nastąpiła więc zmiana schematu statycznego belki z obustronnie utwierdzonej na dwuwspornikowej.

Jaki wysięg a wsporników należało zastosować z obu stron belki, aby pod wpływem obciążenia równomiernie rozłożonego q naprężenia w strefach rozciąganych jej przekroju poprzecznego w środku rozpiętości σ_1 (przekrój 1-1) oraz nad podporami σ_2 (przekroje 2-2) miały tę samą wartość bezwzględną ?

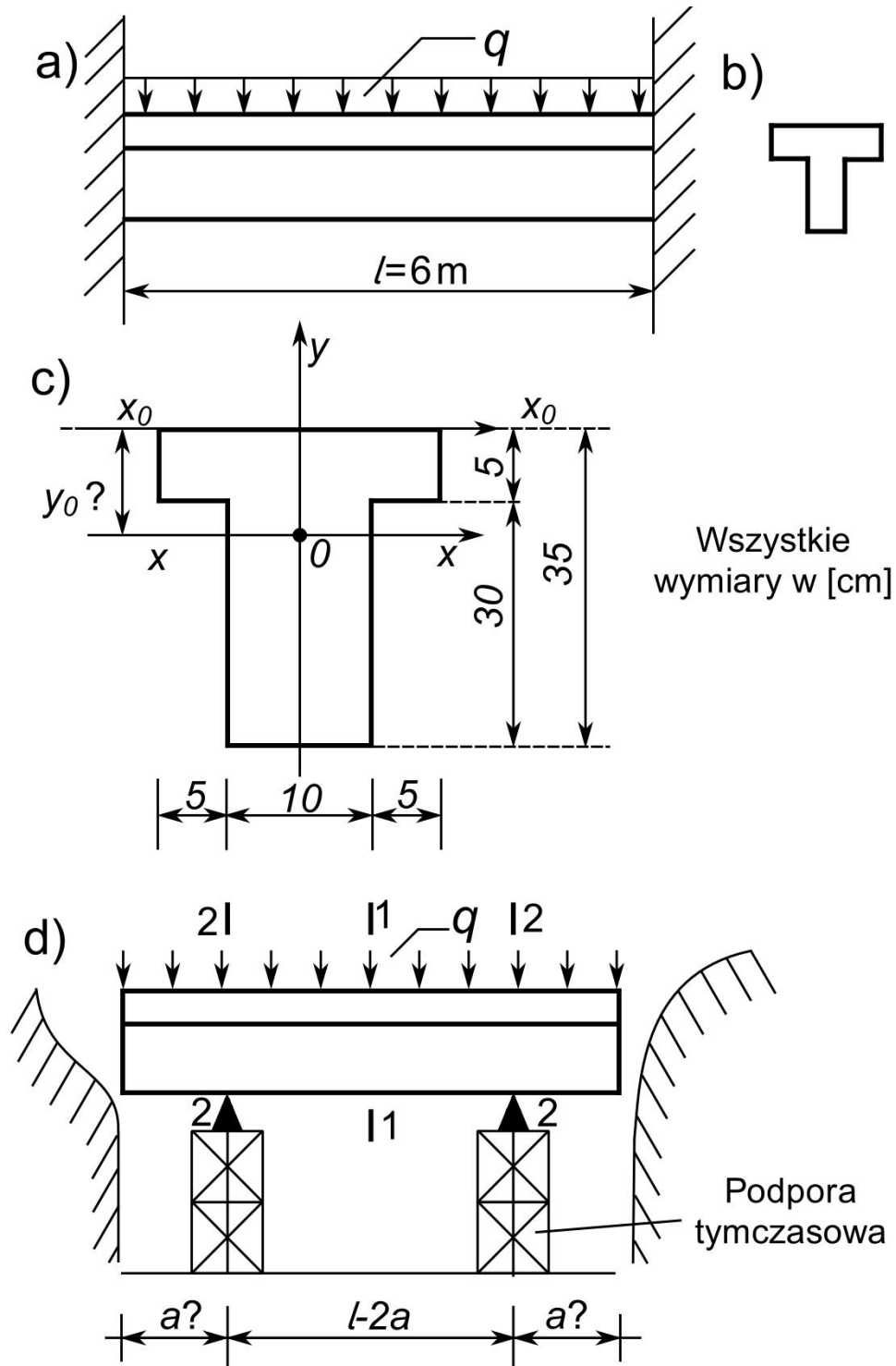
Dane liczbowe:

$l = 6,00$ m, wymiary przekroju poprzecznego podano na rys. 1c.

Wskazówki:

1. Wartości ekstremalnych momentów zginających należy wyznaczyć w elementarny sposób, uwzględniając symetrię układu. Wykres momentów zginających w belce dwuwspornikowej, obciążonej równomiernie na całej jej długości, jest w każdym poradniku.
2. Sposób wyznaczania momentów bezwładności i momentów statycznych figur płaskich jest w każdym podręczniku dotyczącym wytrzymałości materiałów lub w poradnikach.

XLIX OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ
ZAWODY III STOPNIA
ZADANIA I ROZWIĄZANIA DLA GRUPY MECHANICZNO-BUDOWLANEJ

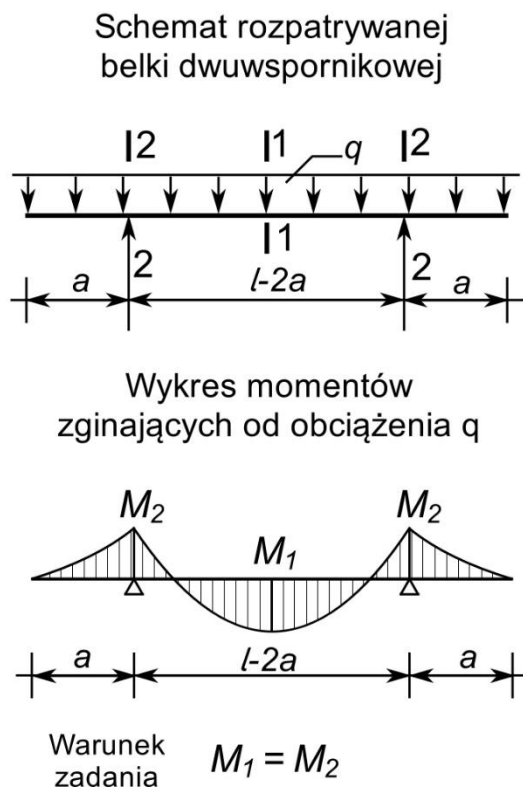


Rys. 1

XLIX OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ
ZAWODY III STOPNIA
ZADANIA I ROZWIĄZANIA DLA GRUPY MECHANICZNO-BUDOWLANEJ

Rozwiązanie

Uwzględniając symetrię układu pokazanego na rys. 2, wyznaczamy w sposób elementarny wartości ekstremalnych momentów zginających:



Rys. 2

$$(1) \quad M_1 = \frac{1}{2} \cdot q \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot (l - 2 \cdot a) - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2 - \frac{1}{2} \cdot q \cdot l \cdot a$$

$$(2) \quad M_2 = \frac{1}{2} \cdot q \cdot a^2$$

Po wstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$(3) \quad M_1 = 4,5 \cdot q - 3,0 \cdot q \cdot a$$

Ponieważ przekrój poprzeczny belki jest niesymetryczny względem osi x (por. rys. 1d), to należy wyznaczyć położenie y_o jego środka ciężkości O ze wzoru:

$$(4) \quad y_o = \frac{S_{x_o}}{A}, \text{ w którym}$$

S_{x_o} jest momentem statycznym przekroju poprzecznego belki względem osi $x_o - x_o$ (rys. 1c), zaś A – polem przekroju poprzecznego tego przekroju.

XLIX OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ
ZAWODY III STOPNIA
ZADANIA i ROZWIĄZANIA DLA GRUPY MECHANICZNO-BUDOWLANEJ

Mamy zatem z rys. 1 :

$$(5) y_0 = \frac{20 \cdot 5 \cdot 2,5 + 30 \cdot 10 \cdot 20}{20 \cdot 5 + 30 \cdot 10} = 15,6 \text{ cm}$$

Położenia środka ciężkości O przekroju pokazano na rys. 1.

Do wyznaczenia wartości naprężeń σ_1 i σ_2 , o których jest mowa w treści zadania, potrzebna jest znajomość tzw. wskaźnika wytrzymałości W przekroju belki. Ponieważ jest on niesymetryczny względem osi poziomej (rys. 1b i 1c), to różne będą wartości dolnego W_d i górnego W_g wskaźników wytrzymałości. Wyznaczenie obu tych wielkości wymaga znajomości wskaźnika bezwładności J_x przekroju poprzecznego belki. Sposób wyznaczenia J_x można znaleźć w każdym podręczniku dotyczącym wytrzymałości materiałów.

Uwzględniając wymiary przekroju podane na rys. 1d, mamy więc:

$$(6) J_x = \frac{20 \cdot 5^3}{12} + 20 \cdot 5 \cdot (15,6 - 2,5)^2 + \frac{10 \cdot 30^3}{12} + 10 \cdot 30 \cdot (20,0 - 15,6)^2 = 45677,33 \text{ cm}^4$$

Wskaźniki wytrzymałości są zatem równe:

$$(7) W_d = \frac{45677,33}{19,4} = 2354,50 \text{ cm}^3 ; W_g = \frac{45677,33}{15,6} = 2928,03 \text{ cm}^3$$

Warunek, aby maksymalne naprężenia rozciągające w dolnych włóknach (tj. w przekroju 1-1) i górnych włóknach (tj. w przekroju 2-2) miały taką samą wartość przyjmuje postać:

$$(8) \sigma_1 = \frac{M_1}{W_d} = \sigma_2 = \frac{M_2}{W_g}$$

Podstawiając do (8) wartości z (2), (3) i (7) otrzymujemy:

$$(8) \frac{4,5 \cdot q - 3,0 \cdot q \cdot a}{2354,50} = \frac{q \cdot a^2}{2 \cdot 2928,03}$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy równanie kwadratowe o postaci:

$$(9) 0,0001707 \cdot a^2 + 0,0012741 \cdot a - 0,0019112 = 0$$

I ostatecznie:

$$(10) a^2 + 7,46 \cdot a + 11,96 = 0$$

To równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki

$$(11) a_1 = 1,265 \text{ m} = 126,5 \text{ cm} \text{ oraz } a_2 = -8,905 \text{ m}$$

Oczywiście sens fizyczny ma tylko pierwszy z tych pierwiastków. Aby zatem spełniony był warunek wymieniony w treści zadania oba wsporniki belki powinny być równe $a = 126,5 \text{ cm}$.

XLIX OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ
ZAWODY III STOPNIA
ZADANIA i ROZWIĄZANIA DLA GRUPY MECHANICZNO-BUDOWLANEJ

Autor: Maciej Jaworski
Koreferent: Wojciech Radomski

Zadanie 2

W celu ograniczenia temperatury nagrzewania się powierzchni różnych obiektów od promieniowania słonecznego (np. zbiorników na paliwo, kontenerów do transportu produktów spożywczych, ale także powierzchni budynków) na ich pokrycia używa się farb (powłok) o tzw. selektywnych właściwościach radiacyjnych. Powierzchnie te mają różne wartości emisyjności dla promieniowania podczerwonego (promieniowanie obiektów o temperaturze zbliżonej do temperatury otoczenia) oraz absorpcyjności dla promieniowania krótkofalowego, tzn. dla promieniowania słonecznego. Dla tzw. powierzchni szarej, będącej uproszczonym modelem powierzchni z punktu widzenia jej oddziaływania z promieniowaniem, wartości te są jednakowe.

Celem zadania jest oszacowanie temperatury t_d , do jakiej nagrzeje się powierzchnia dachu, którego pokrycie ma właściwości selektywne radiacyjnie. Zakłada się, że dach jest doskonale izolowany od wewnątrz – nie ma przepływu ciepła do wnętrza budynku. Powierzchnia zewnętrzna oddziałuje z otoczeniem na drodze radiacyjnej i konwekcyjnej. Oddziaływania te są scharakteryzowane przez następujące wielkości:

- Absorpcyjność dla promieniowania krótkofalowego $\alpha = 0,26$
- Emisyjność dla promieniowania długofalowego $\varepsilon = 0,9$
- Temperatura powietrza $t_0 = 35^\circ\text{C}$
- Współczynnik przejmowania ciepła do powietrza $h = 8 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$
- Temperatura nieboskłonu $t_N = 18^\circ\text{C}$
- Stała promieniowania ciała czarnego $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$

W tych samych warunkach powierzchnia szara o emisyjności i absorpcyjności równej 0,9 nagrzewa się do temperatury 65°C .

Atmosfera ziemską pochłania promieniowanie pochodzące z powierzchni Ziemi, a pochłoniętą energię emituje w postaci promieniowania, także w kierunku Ziemi. Dla uproszczenia opisu tego procesu wprowadza się umowną powierzchnię (nazywaną nieboskłonem), której oddziaływanie radiacyjne z powierzchnią Ziemi jest takie samo jak atmosfery. Powierzchni tej przypisuje się temperaturę, której wartość zależy m.in. od szerokości geograficznej, wilgotności powietrza.

XLIX OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ
ZAWODY III STOPNIA
ZADANIA i ROZWIĄZANIA DLA GRUPY MECHANICZNO-BUDOWLANEJ

Rozwiązanie:

Temperatura powierzchni dachu ustala się w wyniku oddziaływania na jego powierzchni następujących strumieni ciepła:

- absorpcja promieniowania słonecznego:

$$\alpha q_s \quad (1)$$

- wymiana ciepła na drodze promieniowania między powierzchnią dachu a nieboskłonem

$$\varepsilon\sigma(T_d^4 - T_N^4) \quad (2)$$

- wymiana ciepła na drodze konwekcji (przejmowania) z otaczającym powietrzem.

$$h(T_d - T_0) \quad (3)$$

W stanie ustalonym spełniony jest warunek (bilans strumieni ciepła):

$$\alpha q_s - \varepsilon\sigma(T_d^4 - T_N^4) - h(T_d - T_0) = 0 \quad (4)$$

Temperatury w tym równaniu muszą być podane w kelwinach.

Z równania (4) dla podanej temperatury dachu wtedy, kiedy jego powierzchnia ma właściwości ciała szarego można wyznaczyć natężenie promieniowania słonecznego, q_s :

$$q_s = \frac{\varepsilon\sigma(T_d^4 - T_N^4) + h(T_d - T_0)}{\alpha} \quad (5)$$

Po podstawieniu danych otrzymuje się $q_s = 600 \text{ W/m}^2$.

Znając wartość gęstości strumienia ciepła z równania (4) można wyznaczyć temperaturę dachu dla różnych wartości absorpcyjności i emisyjności. Równanie to jest wielomianem 4 stopnia (dla T_d jako niewiadomej). Przy braku narzędzi obliczeniowych temperaturę dachu można **oszacować** metodą prób i błędów, wiedząc, że jej wartość będzie poniżej 65°C .

Wartość temperatury dachu wynosi ok. $39,5^\circ\text{C}$. Oczekiwany jest wynik z dokładnością do kilku stopni Celsjusza. Istotne znaczenie ma metoda rozwiązania zadania.