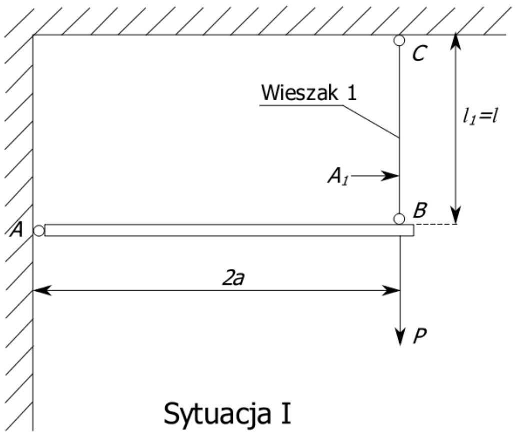
XLVII OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ
ZAWODY III STOPNIA
ZADANIA i ROZWIĄZANIA DLA GRUPY MECHANICZNO-BUDOWLANEJ

Autor: Wojciech Radomski
Koreferent Jacek Bzowski

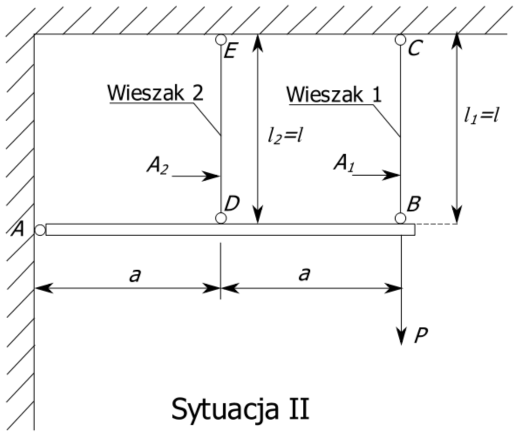
Zadanie nr 1

Podczas przebudowy budynku fabrycznego natrafiono na konstrukcję pokazaną na rys. 1 – pozioma, sztywna, nieodkształcalna belka stalowa oparta była przegubowo jednym końcem (punkt *A*) w pionowej ścianie, natomiast drugi jej koniec (punkt *B*) podwieszony był do stropu za pomocą dwuprzegubowego (punkty *B* i *C*), pionowego stalowego pręta-wieszaka o przekroju okrągłym średnicy d_1. Powstała potrzeba, aby w punkcie *B* podwiesić czasowo ciężar *P*. Inżynier przeprowadził krótkie obliczenie i orzekł, że zastany układ konstrukcyjny przeniesie wprawdzie ten ciężar, ale z małym zapasem nośności i wobec mogących wystąpić niespodziewanych okoliczności, lepiej jest zapewnić lepsze bezpieczeństwo temu układowi. Dlatego zaproponował zainstalowanie dodatkowego pionowego wieszaka z okrągłego pręta stalowego o średnicy d_2, bo takim dysponował, w połowie rozpiętości belki (rys. 2). Długości obu prętów-wieszaków l_1 i l_2 są takie same i równe *l*. Wykonane przez inżyniera obliczenia wykazały, że tak zmodyfikowany układ konstrukcyjny bezpiecznie przeniesie ciężar *P*.



Sytuacja I

Rys. 1



Sytuacja II

Rys. 2

Należy powtórzyć obliczenia inżyniera, mając na uwadze, że zmodyfikowany układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny i równania równowagi nie wystarczają do wyznaczenia sił w nim panujących pod działaniem ciężaru *P*. Należy zatem wyznaczyć:

a) wartości sił N_1 i N_2 w obu wieszakach;
b) wartość reakcji R_A w punkcie *A*;
c) wartości naprężeń normalnych σ_1 i σ_2 w obu wieszakach;
d) wartości wydłużeń Δl_1 i Δl_2 obu wieszaków pod wpływem działania ciężaru *P*.

Ciężar własny poziomej beli i prętów-wieszaków można pominąć.

Dane liczbowe: $l_1 = l_2 = l = 2{,}5$ m; rozstaw wieszaków $a = 2{,}0$ m; średnice prętów $d_1 = 2{,}8$ cm i $d_2 = 2{,}0$ cm; ciężar $P = 120$kN. Ponadto: moduł Younga stali $E = 205\ GPa = 20500\ kN/cm^2$, wytrzymałość obliczeniowa stali $f_d = 205$ MPa.

Która wartość liczbowa była zbędna do rozwiązania zadania?

Rozwiązanie zadania nr 1

Przed modyfikacją układu konstrukcyjnego

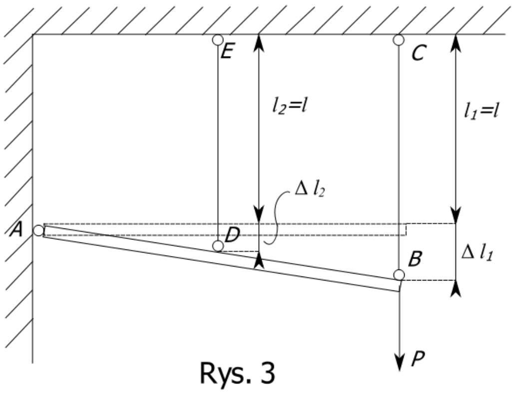
Ciężar P = 120 kN, zawieszony bezpośrednio pod wieszakiem *1*, wywiera w nim naprężenia:

$$\sigma = \frac{P}{A_1} = \frac{P \cdot 4}{\pi\, d_1^2} = \frac{120 \cdot 4}{\pi \cdot 2{,}8^2} = 19{,}50 \frac{kN}{cm^2} = 195\ MPa$$

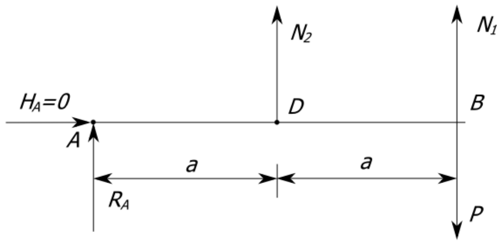
Ta wartość jest wprawdzie nieco niższa od wartości obliczeniowej stali na rozciąganie, przyjmowanej jako równa 205 MPa, ale do niej zbliżona (dopuszczalny poziom naprężeń wykorzystany aż w 95%). Słuszne więc były wątpliwości inżyniera. Dlatego polecił modyfikację układu przez zainstalowanie drugiego pręta-wieszaka (por. treść zadania).

Po modyfikacji układu konstrukcyjnego

Otrzymujemy układ jednokrotnie statycznie niewyznaczalny. Oprócz równań równowagi należy skorzystać z relacji geometrycznej dotyczącej wydłużeń prętów.



Rys. 3



Rys. 4

Równania równowagi (rys. 3)

(1) $\sum X = H_A = 0$

(2) $\sum Y = R_A + N_1 + N_2 - P = 0$

(3) $\sum M_A = -N_1 \cdot 2a - N_2 \cdot a + P \cdot 2a = 0$

Wobec braku sił poziomych z (1) wynika wprost, że $H_A = 0$

Mamy dwa równania równowagi (2) i (3), ale trzy niewiadome: R_A, N_1, N_2.

Trzecie równanie wynika z wydłużeń obu prętów, które można sformułować na podstawie podobieństwa trójkątów (rys. 3), pamiętając, że pozioma belka jest sztywna, nieodkształcalna.

Mamy zatem:

(4) $\frac{\Delta l_{BC}}{2a} = \frac{\Delta l_{DE}}{a}$, skąd

(5) $\Delta l_{BC} = 2\,\Delta l_{ED}$

Z prawa Hooke'a wynika, że:

(6) $\Delta l_{BC} = \frac{N_1\, l_{BC}}{E\, A_1}$, $\quad \Delta l_{DE} = \frac{N_2\, l_{DE}}{E\, A_2}$

Z (4), (5) i (6) otrzymujemy, pamiętając, że $l_{BC} = l_{DE} = l$

(7) $N_1 = 2\,N_2\,\frac{A_1}{A_2}$

Z danych liczbowych wynika, że:

(8) $A_1 = \frac{\pi\,d_1^2}{4} = \frac{\pi\,2{,}8^2}{4} = 6{,}15 cm^2 \quad A_2 = \frac{\pi\,d_2^2}{4} = \frac{\pi\,2{,}0^2}{4} = 3{,}14\ cm^2$

Z (7) i (8) otrzymujmy:

(9) $N_1 = 2\,N_2\,\frac{A_1}{A_2} = 2\,N_2\,\frac{6{,}15}{3{,}14} = 3{,}92\,N_2$

Z (2), (3) i (9) mamy (rys. 4):

(10) $R_A + 3{,}92\,N_2 + N_2 - 120 = 0$

(11) $-7{,}84\,N_2 - N_2 + 240 = 0$

Ostatecznie z (10) i (11) otrzymujemy:

(12) $N_1 = 106{,}42\ kN;\ N_2 = 27{,}15\ kN;\ R_A = -13{,}57\ kN$

Warto zwrócić uwagę, że reakcja R_A jest ujemna. Oznacza to, że na podporze A występuje odrywanie belki.

Naprężenia normalne w prętach-wieszakach są równe:

- w pierwszym

(13) $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{106{,}41}{6{,}15} = 17{,}30\,\frac{kN}{cm^2} = 173\ MPa$

- w drugim

(14) $\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{27{,}15}{3{,}14} = 8{,}65\,\frac{kN}{cm^2} = 86{,}65\ MPa$

Ponieważ wytrzymałość obliczeniowa stali St3SX, z której wykonane są wieszaki, przyjmowana jest jako równa 205 MPa, to obliczone naprężenia w wieszakach wskazują, że rozpatrywany układ konstrukcyjny jest bezpieczny (dopuszczalny poziom naprężeń wykorzystany w 84%, a więc układ konstrukcyjny po modyfikacji jest ekonomiczny, ale z rozsądnym zapasem bezpieczeństwa).

Wydłużenia wieszaków są równe:

- pierwszego

(15) $\Delta l_1 = \frac{N_1\,l}{EA_1} = \frac{106{,}41 \cdot 250}{20500 \cdot 6{,}15} = 0{,}211 cm = 2{,}11\ mm$

- drugiego

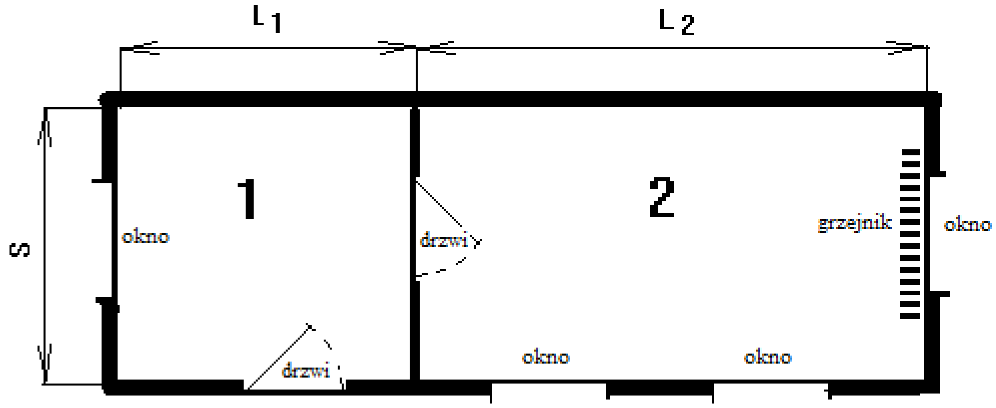
(16) $\Delta l_2 = \frac{N_2\,l}{EA_2} = \frac{27{,}15 \cdot 250}{20500 \cdot 3{,}14} = 0{,}105\ cm = 1{,}05\ mm$

Wartość a rozstawu wieszaków okazała się zbędna do rozwiązania zadania – wystarczyłaby informacja , że rozstawy te są sobie równe.

Autor: Jacek Bzowski
Koreferent: Maciej Jaworski

Zadanie nr 2

Barak (patrz rysunek) ma wymiary: L_1=4 m, L_2=8 m, S=4 m i wysokość H=3,5 m. Ściany budynku wykonane są z dwóch warstw: cegieł o szerokości g_c=0,24 m i pustaków szerokości g_p= 0,36 m. Współczynnik przewodzenia ciepła dla cegły wynosi λ_c =0,72 W/mK, a dla pustaka λ_p=0,36 W/mK. Współczynnik przejmowania ciepła po stronie wewnętrznej wynosi h_i=8 W/m^{2}K, a po stronie zewnętrznej h_e=25 W/m^{2}K. Ściana działowa jest ceglana grubości g_w=0,12 m. Okna o wymiarze h_{ok} =1,5 m i s_{ok}=1 m mają współczynnik przenikania ciepła u_{ok}=1,3 W/m^{2}K. Drzwi o wymiarze h_d =2 m i s_d=0,9 m mają współczynnik przenikania ciepła u_d=1,6 W/m^{2}K. Strop baraku wykonano z płyty żelbetowej o grubości $g_{żb}$=0,20 m i współczynniku przewodzenia ciepła $\lambda_{żb}$=1,7 W/mK pokrytej warstwą wełny mineralnej o grubości $g_{wł}$=0,15 m i współczynniku przewodzenia ciepła $\lambda_{wł}$=0,042 W/mK. Warstwa wełny osłonięta jest papą o pomijalnym oporze cieplnym. Współczynnik przejmowania ciepła po stronie wewnętrznej stropu „do góry” wynosi α_{ist}=10 W/m^{2}K, a na zewnątrz taki jak dla ścian pionowych. Przyjąć, że strata ciepła do gruntu stanowi 50% straty ciepła przez strop. W większym pomieszczeniu (2) znajduje się grzejnik, dzięki któremu utrzymywana w nim jest temperatura T_2=20^{0}C. Temperatura zewnętrzna wynosi T_e=-3^{0}C co odpowiada średniej temperaturze lutego - najchłodniejszego miesiąca roku.



Obliczyć:

1) Temperaturę w pomieszczeniu (1).
2) Czy możliwe jest takie docieplenie styropianem stropu wyłącznie nad pomieszczeniem (1), aby temperatura w nim osiągnęła T_{1k}=12^{0}C. Współczynnik przewodzenia ciepła dla styropianu wynosi λ_{st}=0,038 W/mK.
3) Jeżeli nie jest możliwe ocieplenie stropu należy obliczyć grubość styropianu ocieplającego ściany zewnętrzne pomieszczenia (1) w celu uzyskania temperatury T_{1k}.
4) O ile procent zmieni się zapotrzebowanie na energię w tym drugim przypadku (po dociepleniu) w porównaniu z sytuacją pierwotną.

Uwaga: Podane wymiary poprowadzono wewnątrz budynku z pominięciem - jako małej - grubości ścianki działowej.

Rozwiązanie zadania nr 2

Powierzchnia drzwi i okna

$F_d=h_d \cdot s_d=2 \cdot 0{,}9=1{,}8\ m^2$; $F_{ok}=h_{ok} \cdot s_{ok}=1{,}5 \cdot 1=1{,}5\ m^2$;

Powierzchnia ścian zewnętrznych i stropu pomieszczenia (1)

$F_1= H \cdot (2 \cdot L_1 +S)-F_{ok}-F_d=3{,}5 \cdot (2 \cdot 4+4)-1{,}5-1{,}8=38{,}7\ m^2$;

$F_{st1}=L_1 \cdot S=4 \cdot 4=16\ m^2$;

Powierzchnia ścian zewnętrznych i stropu pomieszczenia (2)

$F_2= H \cdot (2 \cdot L_2 +S)-3 \cdot F_{ok}=3{,}5 \cdot (2 \cdot 8+4)-3 \cdot 1{,}5=65{,}5\ m^2$;

$F_{st2}=L_2 \cdot S=8 \cdot 4=32\ m^2$;

Powierzchnia ściany działowej (wewnętrznej)

$F_{we}=H \cdot S-F_d=3{,}5 \cdot 4-1{,}8=12{,}2\ m^2$;

Współczynnik przenikania ciepła ściany zewnętrznej

$$u_z = \frac{1}{\frac{1}{h_e}+\frac{g_c}{\lambda_c}+\frac{g_p}{\lambda_p}+\frac{1}{h_i}} = \frac{1}{\frac{1}{25}+\frac{0{,}24}{0{,}72}+\frac{0{,}36}{0{,}36}+\frac{1}{8}} = 0{,}67\, W/m^2K$$

Współczynnik przenikania ciepła ściany wewnętrznej:

$$u_w = \frac{1}{\frac{1}{h_i}+\frac{g_w}{\lambda_c}+\frac{1}{h_i}} = \frac{1}{\frac{1}{8}+\frac{0{,}12}{0{,}72}+\frac{1}{8}} = 2{,}4\ W/m^2K$$

Współczynnik przenikania ciepła stropu:

$$u_{st} = \frac{1}{\frac{1}{h_{ist}}+\frac{g_{żb}}{\lambda_{żb}}+\frac{g_{wl}}{\lambda_{wl}}+\frac{1}{h_e}} = \frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{0{,}2}{1{,}7}+\frac{0{,}15}{0{,}042}+\frac{1}{25}} = 0{,}261 W/m^2K$$

1) Obliczenie temperatury T_1 z bilansu ciepła (dopływające przez ścianę wewnętrzną jest równe wypływającemu przez ściany zewnętrzne.)

$(F_{we} \cdot u_w+F_d \cdot u_d) \cdot (T_2-T_1)=(F_1 \cdot u_z +F_{ok} \cdot u_{ok}+F_d \cdot u_d+1{,}5 \cdot F_{st1} \cdot u_{st}) \cdot (T_1-T_e)$ (1)

$A \cdot (T_2-T_1)=B \cdot (T_1-T_e)$; gdzie:

$A=F_{we} \cdot u_w+F_d \cdot u_d=12{,}2 \cdot 2{,}4+1{,}8 \cdot 1{,}6=32{,}16$;

$B= F_1 \cdot u_z +F_{ok} \cdot u_{ok}+ F_d \cdot u_d+1{,}5 \cdot F_{st1} \cdot u_{st} =38{,}7 \cdot 0{,}67+1{,}5 \cdot 1{,}3+1{,}8 \cdot 1{,}6+1{,}5 \cdot 16 \cdot 0{,}261=36{,}93$

$$T_1 = \frac{A \cdot T_2 + B \cdot T_e}{A+B} = \frac{32{,}16 \cdot 20 + 36{,}93 \cdot (-3)}{32{,}16+36{,}93} = 7{,}71^0C$$

2) Podstawiając do równania (1) $T_1=12^0C$ wyznaczamy w pierwszym kroku nowy współczynnik przenikania ciepła dla stropu u_{st1}

$$u_{st1}=\frac{\frac{A\cdot(T_2-T_1)}{T_1-T_e}-F_1\cdot u_z-F_{ok}\cdot u_{ok}-F_d\cdot u_d}{1{,}5\cdot F_{st1}}=\frac{\frac{32{,}16\cdot(20-12)}{12-(-3)}-38{,}7\cdot 0{,}67-1{,}5\cdot 1{,}3-1{,}8\cdot 1{,}6}{1{,}5\cdot 16}$$

u_{st1}=-0,567 W/m^2 K

Wartość ujemna współczynnika przenikania ciepła oznacza niemożliwość uzyskania temperatury 12^0C w pomieszczeniu (1) poprzez ocieplenia stropu.

3) Podstawiając do równania (1) $T_1=12^0C$ wyznaczamy w pierwszym kroku nowy współczynnik przenikania ciepła dla ściany zewnętrznej u_{z2}

$$u_{z2}=\frac{\frac{A\cdot(T_2-T_1)}{T_1-T_e}-F_{ok}\cdot u_{ok}-F_{ok}\cdot u_{ok}-1{,}5\cdot F_{st1}\cdot u_{st}}{F_1}=$$

$$=\frac{\frac{32{,}16\cdot(20-12)}{12-(-3)}-1{,}5\cdot 1{,}3-1{,}8\cdot 1{,}6-1{,}5\cdot 16\cdot 0{,}261}{38{,}7}=$$

u_{z2}=0,156 W/m^2 K

a następnie wyznaczamy grubość styropianu:

$$u_{z2}=\frac{1}{\frac{1}{h_e}+\frac{g_c}{\lambda_c}+\frac{g_p}{\lambda_p}+\frac{g_{st}}{\lambda_{st}}+\frac{1}{h_i}}$$

a stąd:

$$g_{st}=\left(\frac{1}{u_{z2}}-\frac{1}{h_e}-\frac{g_c}{\lambda_c}-\frac{g_p}{\lambda_p}-\frac{1}{h_i}\right)\cdot\lambda_{st}=\left(\frac{1}{0{,}156}-\frac{1}{25}-\frac{0{,}24}{0{,}72}-\frac{0{,}36}{0{,}36}-\frac{1}{8}\right)\cdot 0{,}038=0{,}16\ \ m$$

4) Całkowita gęstość strumienia ciepła:

$q_1=\ (F_2\cdot u_z+3\cdot F_{ok}\cdot u_{ok}+1{,}5\cdot F_{st2}\cdot u_{st})\cdot(T_2-T_e)+(F_{we}\cdot u_w+Fd\cdot u_d)\cdot\ (T_2-T_1)$

Dla $T_1=7{,}71^0C$

q_1=(65,2·0,67+3·1,5·1,3+1,5·32·0,261)·(20–(-3))+(12,2·2,4+1,8·1,6)·(20-7,71)=1823,7 W

Dla $T_1=12^0C$ (po dociepleniu)

q_2=(65,2·0,67+3·1,5·1,3+1,5·32·0,261)·(20–(-3))+(12,2·2,4+1,8·1,6) ·(20-12)=1685,6 W

δ=(q_1-q_2)/q_1*100=(1823,7 -1685,6)/ 1823,7 =7,57 %

Zużycie energii zmalało o 7,57%