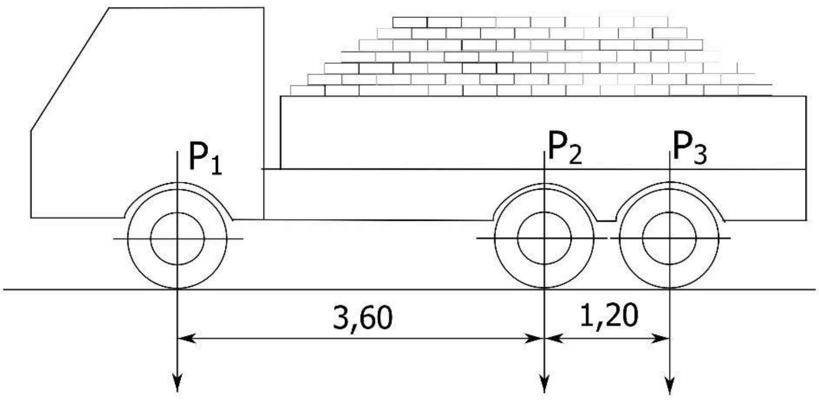
XLVII OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ
ZAWODY II STOPNIA

ZADANIA I ICH ROZWIĄZANIA DLA GRUPY MECHANICZNO-BUDOWLANEJ

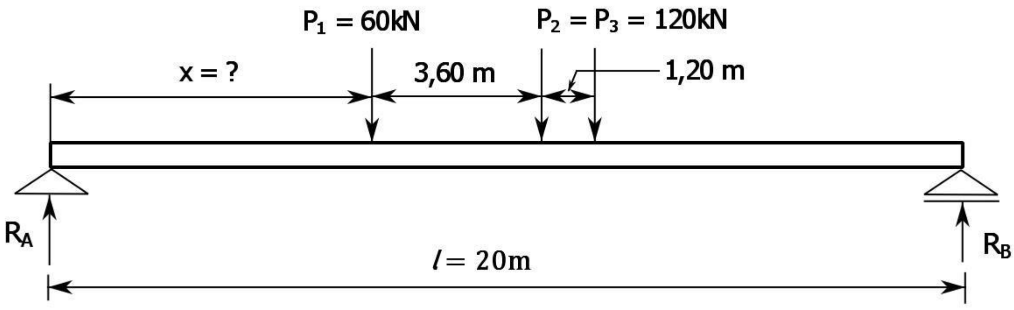
Autor: Wojciech Radomski
Koreferent: Jacek Bzowski

Zadanie 1

W mostownictwie stosowane jest tzw. obciążenie próbne przed oddaniem obiektu do eksploatacji. Najogólniej rzecz ujmując, ma ono na celu sprawdzenie czy dany most może być bezpiecznie użytkowany. Do próbnego obciążenia służą najczęściej samochodowe wywrotki naładowane piaskiem. Znane muszą być rozstawy ich osi oraz naciski osiowe. Przykład takiej wywrotki wraz z wymaganymi danymi liczbowymi pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Wywrotka samochodowa. Wymiary w m; P_1 = 60 kN, $P_2 = P_3 = 120$ kN.



Rys. 2. Schemat przęsła i jego obciążenie, który należy rozpatrzyć

Jak należy ustawić tę wywrotkę na przęśle o schemacie belki swobodnie podpartej i rozpiętości *l* =20 m, aby wywołać w nim maksymalną wartość momentu zginającego M_{max} ? Sytuację, którą należy rozpatrzyć pokazano na rys. 2. Należy także wykonać wykres momentów wzdłuż przęsła.

Wskazówki i uwagi

1. Ciężaru własnego przęsła nie należy uwzględniać.
2. Analiza kształtu wykresu momentów zginających w belce, pod obciążającym ją układem trzech sił, wskazuje, że maksymalna wartość momentu M_{max} wystąpi pod jedną z sił – określ pod którą.
3. Do rozwiązania zadania przydatna jest znajomość elementarnego różniczkowania w celu wyznaczenia maksymalnej wartości funkcji opisującej moment zginający – położenie obciążenia, czyli *M(x)*.

Zadanie 1 - rozwiązanie

Najpierw należy na podstawie rys. 2 wyznaczyć reakcję R_A. Z warunku równowagi względem podpory *B* otrzymujemy.

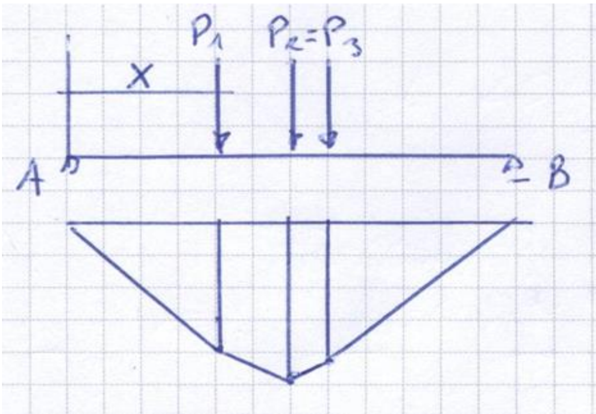
$$R_A \cdot l - P_1 \ (l - x) - P_2 \ (l - x - 3{,}60) - P_3 \ (l - x - 3{,}60 - 1{,}20) = 0, \qquad (1)$$

skąd po wstawieniu pozostałych danych liczbowych

$$R_A \cdot 20 = 60\ (20 - x) + 120\ (20 - x - 3{,}60) + 120\ (20 - x - 3{,}60 - 1{,}20)$$

$$R_A = \frac{4992 - 300\,x}{20} = 249{,}6 - 15\,x \qquad (2)$$

Teraz znajdziemy odcinek *x* odpowiadający M_{max}. Wstępna analiza wykresu momentów zginających wskazuje, że M_{max} wystąpi pod siłą P_2. Przy tego rodzaju układzie sił wykres momentów ma kształt pokazany na rys. 3



Rys. 3 Orientacyjny wykres momentów zginających w belce

Mamy zatem:

$M_{max} = R_A \cdot (x + 3{,}60) - P_1 \cdot 3{,}2$

$M_{max} = (249{,}6 - 15\,x)\,(x + 3{,}60) - 3{,}2 \cdot 60 =$

$= 249{,}6\,x + 898{,}56 - 15\,x^2 - 54\,x - 192 =$

$= -15\,x^2 + 195{,}6\,x + 706{,}53$ (3)

Aby znaleźć szukaną długość odcinka x można albo rozwiązać równanie kwadratowe (3), albo zróżniczkować je względem x i przyrównując różniczkę do 0.

$$\frac{dM_{max}}{dx} = -30\,x + 195{,}6 = 0 \qquad (4)$$

skąd :

$x = 6{,}52$ m

Autor: Wojciech Radomski
Koreferent: Jacek Bzowski

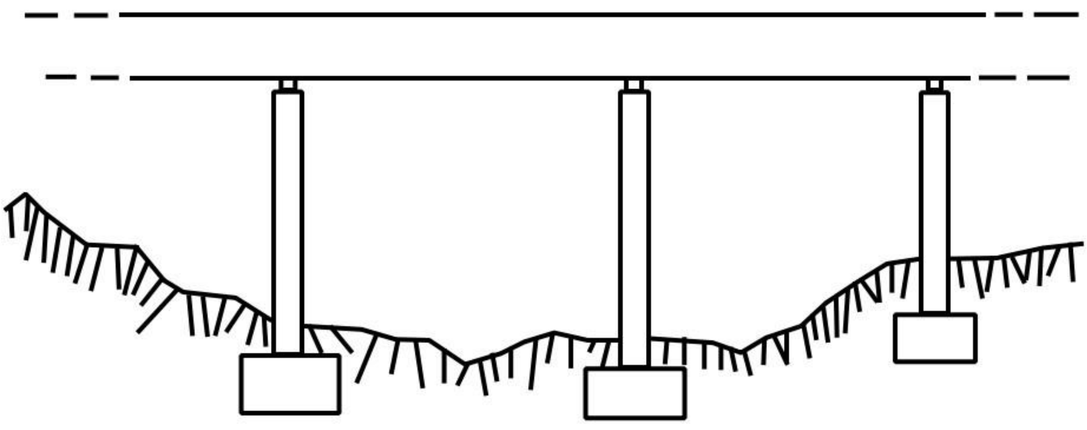
Zadanie 2

Podporę mostu nisko położonego nad terenem stanowi żelbetowy słup o przekroju kołowym A (rys. 1). Na górnej powierzchni tego słupa usytuowano jest łożysko przegubowo-nieprzesuwne. Na łożysko to działa pionowa reakcja R oraz siła pozioma H od hamowania pojazdów.

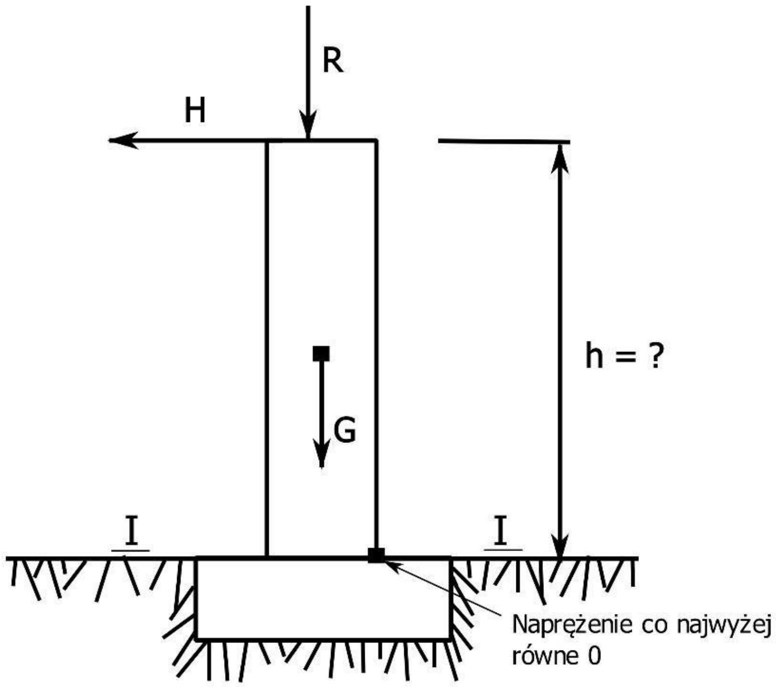
Jaka może być największa wysokość słupa h, aby od układu sił pokazanego na rys. 2 (siły R, H oraz ciężar własny G słupa) w przekroju $I - I$ utwierdzenia słupa w fundamencie nie wystąpiły naprężenia rozciągające? Sprawdź też, czy przy wyznaczonej wysokości h słupa nie wystąpi niebezpieczeństwo jego sprężystego wyboczenia.

Dane liczbowe: średnica słupa d = 0,8 m; ciężar własny żelbetu γ = 25 kN/m^3; R = 300 kN; $H = 15$ *kN;* moduł sprężystości betonu (moduł Younga) E = 35.000 kN/m^2.

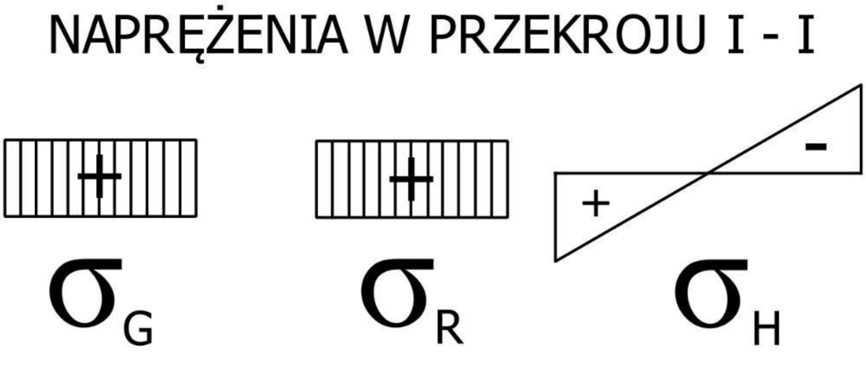
Wzory określające wskaźnik wytrzymałości W i moment bezwładności J przekroju kołowego można znaleźć w każdym poradniku.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zadanie 2 - rozwiązanie

Najpierw wyznaczymy wartości sił i naprężeń w słupie od zadanego obciążenia. Zgodnie z rys. 2 mamy:

Ciężar własny słupa:

(1) $G = A \cdot \mathrm{h} \cdot \gamma$, w którym

(2) $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$

zaś naprężenia ściskające w dolnym przekroju $I - I$ słupa, w miejscu jego utwierdzenia w fundamencie wyraża wzór:

(3) $\sigma_G = \frac{G}{A} = h \cdot \gamma$

Naprężenia ściskające w słupie od reakcji *R* na łożysku:

(4) $\sigma_R = \frac{R}{A}$

Moment zginający w przekroju utwierdzenia słupa w fundamencie:

(5) $M = H \cdot h$

Naprężenia w przekroju *I* - *I* wyraża wzór

(6) $\sigma_M = \pm \frac{M}{W}$,

w którym *W* wskaźnikiem wytrzymałości przekroju słupa. W przypadku przekroju kołowego, mamy (można to znaleźć w każdym poradniku):

(7) $W = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$,

a zatem:

(8) $\sigma_M = \frac{H \cdot h \cdot 32}{\pi \cdot d^3}$

Z warunków zadania wynika, że:

(9) $\sigma_G + \sigma_R - \sigma_M = 0$ (rys. 3)

Wstawiając do (9) zależności (3), (4) i (8) otrzymujemy po przekształceniach:

(10) $h \cdot \gamma + \frac{R}{A} - \frac{M}{W} = 0$

(11) $h \cdot \gamma + \frac{R \cdot 4}{\pi \cdot d^2} - \frac{H \cdot h \cdot 32}{\pi \cdot d^3} = 0$

(12) $h\left(\gamma - \frac{H \cdot 32}{\pi \cdot d^3}\right) = -\frac{R \cdot 4}{\pi \cdot d^2}$

Po wstawieniu danych liczbowych mamy:

(13) $h\left(25 - \frac{15 \cdot 32}{\pi \cdot 0{,}8^3}\right) = -\frac{300 \cdot 4}{\pi \cdot 0{,}8^2}$

Skąd

(14) $h = 2{,}18\ m$

Zgodnie z drugim poleceniem w treści zadania należy jeszcze sprawdzić, czy słup o wyznaczone wysokości nie ulegnie sprężystemu wyboczeniu pod wpływem siły *R*. W tym przypadku ciężar własny słupa można pominąć, jak również jego odkształcenia spowodowane działaniem siły *H* (są pomijalnie małe, a ponadto nie zajmujemy się tu tzw. teorią drugiego rzędu).

Wyznaczymy wartość siły krytycznej ze wzoru *Eulera*:

(15) $P_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l_w^2}$,

(16) $l_w = \lambda \cdot l$

W naszym przypadku długość wyboczeniowa słupa l_w jest równa $2 \cdot l$ (słup jednostronnie utwierdzony, drugi koniec swobodny, współczynnik wyboczeniowy $\lambda = 2{,}0$ (można to znaleźć w każdym poradniku).

(17) $J = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$ (wzór na moment bezwładności przekroju kołowego można znale w każdym poradniku)

(18) $J = \frac{\pi \cdot 0{,}8^4}{64} = 0{,}020$

Wstawiając dane liczbowe do (15) otrzymujemy:

(19) $P_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot 35.000 \cdot 0{,}020}{(2 \cdot 2{,}18)^2}$ = 363,06 kN

Jest to więc siła większa od siły *R* = 300 kN.

XLVII OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ
ZAWODY II STOPNIA

Autor: Maciej Jaworski
Koreferent: Jacek Bzowski

Zadanie 3

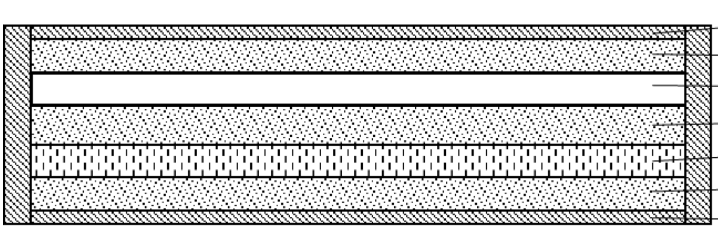
Schemat kontenera do transportu środków medycznych w niskich temperaturach jest pokazany na rysunku. Źródłem chłodzenia jest zbiornik z ciekłym azotem. Zbiornik ten jest oddzielony od właściwego zasobnika warstwą izolacji o grubości d_w – od grubości tej warstwy zależy temperatura w zasobniku. Ograniczenie strumienia ciepła z otoczenia zapewniają dwie warstwy izolacji (górna i dolna), obie o grubości d_{iz}, oraz obudowa zewnętrzna o grubości d_{ob}.

Założenia upraszczające:

- przyjmuje się, że całkowita grubość kontenera, jak i poszczególnych warstw, jest mała w porównaniu do pozostałych wymiarów (jest on płaski) – można więc przyjąć, że przepływ ciepła jest jednowymiarowy,
- temperatura górnej i dolnej ścianki zasobnika są jednakowe (temperatura zasobnika jest jednorodna),
- temperatura ścianek zbiornika ciekłego azotu jest stała w czasie jego odparowywania i równa t_N (nieco wyższa niż temperatura wrzenia azotu pod ciśnieniem atmosferycznym).

Jaka powinna być grubość izolacji między zasobnikiem środków medycznych i zbiornikiem ciekłego azotu (d_w) aby utrzymać w nim (zasobniku) temperaturę t_{med}?

Początkowo w zbiorniku jest V ciekłego azotu. Temperatura t_N utrzymuje się do czasu, kiedy w zbiorniku pozostanie nie mniej niż 10% początkowej ilości. Po jakim czasie τ należy uzupełnić zbiornik azotu?



Dane:

- grubość obudowy d_{ob} = 0,02 m; grubość izolacji d_{iz} = 0,05 m
- przewodność cieplna materiału obudowy λ_{ob} = 0,2 W/(m·K)
- grubość izolacji (warstwy zewnętrzne) d_{iz} = 0,05 m
- przewodność cieplna izolacji λ_{iz} = 0,05 W/(m·K)
- temperatura środków medycznych t_{med} = -80°C; temperatura otoczenia t_{ot} = 25°C
- współczynnik przejmowania ciepła z powierzchni zewnętrznych α = 50 W/(m^2·K)
- temperatura zbiornika z azotem t_N = -180°C,
- ciepło parowania azotu C_N = 198 kJ/kg,
- początkowa ilość azotu V = 0,02 m^3

- gęstość ciekłego azotu ρ_N = 810 kg/m^3
- powierzchnia kontenera S = 0,5 m^2

Zadanie 3 – rozwiązanie

W rozważanym układzie ciepło płynie z otoczenia w kierunku zbiornika z ciekłym azotem zarówno z góry, jak i z dołu.

Strumień ciepła z góry można określić w ujęciu cząstkowym: między powietrzem a zasobnikiem środków medycznych oraz między tym zasobnikiem a zbiornikiem ciekłego azotu. Obie, tak wyznaczone wielkości, w warunkach ustalonych muszą być jednakowe.

Gęstość strumienia ciepła między powietrzem a zasobnikiem środków medycznych

$$q_1 = \frac{t_{ot} - t_{med}}{R_1}$$

Gdzie R_1 jest oporem cieplnym przenikania między otoczeniem a zasobnikiem środków medycznych:

$$R_1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{d_{ob}}{\lambda_{ob}} + \frac{d_{iz}}{\lambda_{iz}}$$

Gęstość strumienia ciepła między zasobnikiem środków medycznych a zbiornikiem ciekłego azotu

$$q_2 = \frac{t_{med} - t_N}{R_2}$$

Gdzie R_2 jest oporem cieplnym przewodzenia przez warstwę izolacji między zasobnikiem środków medycznych a zbiornikiem ciekłego azotu:

$$R_2 = \frac{d_w}{\lambda_{iz}}$$

W warunkach ustalonych $q_1 = q_2$, co można zapisać

$$\frac{t_{ot} - t_{med}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{d_{ob}}{\lambda_{ob}} + \frac{d_{iz}}{\lambda_{iz}}} = \frac{t_{med} - t_N}{\frac{d_w}{\lambda_{iz}}}$$

W tym związku jedyna niewiadomą jest grubość wewnętrznej izolacji, d_w

$$d_w = \lambda_{iz} \frac{t_{med} - t_N}{t_{ot} - t_{med}} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{d_{ob}}{\lambda_{ob}} + \frac{d_{iz}}{\lambda_{iz}}\right)$$

Po podstawieniu danych

$$d_w = 0{,}05 \cdot \frac{-80 + 180}{25 + 80} \left(\frac{1}{50} + \frac{0{,}02}{0{,}2} + \frac{0{,}05}{0{,}05}\right) = 0{,}0533\, m$$

Gęstość strumienia ciepła z góry w kierunku zbiornika z ciekłym azotem (biorąc pod uwagę przepływ/przewodzenie ciepła przez wewnętrzną izolację):

$$q_g = q_2 = \frac{t_{med} - t_N}{d_w/\lambda_{iz}} = \frac{-80 + 180}{0{,}0533/0{,}5} = 93{,}8\, W/m^2$$

Gęstość strumienia ciepła z dołu w kierunku zbiornika z ciekłym azotem:

$$q_d = \frac{t_{ot} - t_N}{\frac{1}{\alpha} + \frac{d_{ob}}{\lambda_{ob}} + \frac{d_{iz}}{\lambda_{iz}}} = \frac{25 + 180}{\frac{1}{50} + \frac{0,02}{0,2} + \frac{0,05}{0,05}} = 183,0 \frac{W}{m^2}$$

Całkowity strumień ciepła dopływającego z otoczenia do zbiornika z azotem (biorąc pod uwagę powierzchnię zasobnika):

$$Q = S\left(q_g + q_d\right) = 0,5 \cdot (93,8 + 183,0) = \ 138,4\,W$$

Bilans energii (ciepła) dla zbiornika z ciekłym azotem – odparowanie azotu na skutek dopływu ciepła z zewnątrz:

$$\Delta V\,\rho_N\,C_N = Q\,\tau$$

Czas do uzupełnienia azotu:

$$\tau = \frac{\Delta V\,\rho_N\,C_N}{Q} = \frac{0,9 \cdot 0,02 \cdot 810 \cdot 198 \cdot 10^3}{138,4} = 20858,7\,s = 5,79\,godz.$$