# XLVI OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

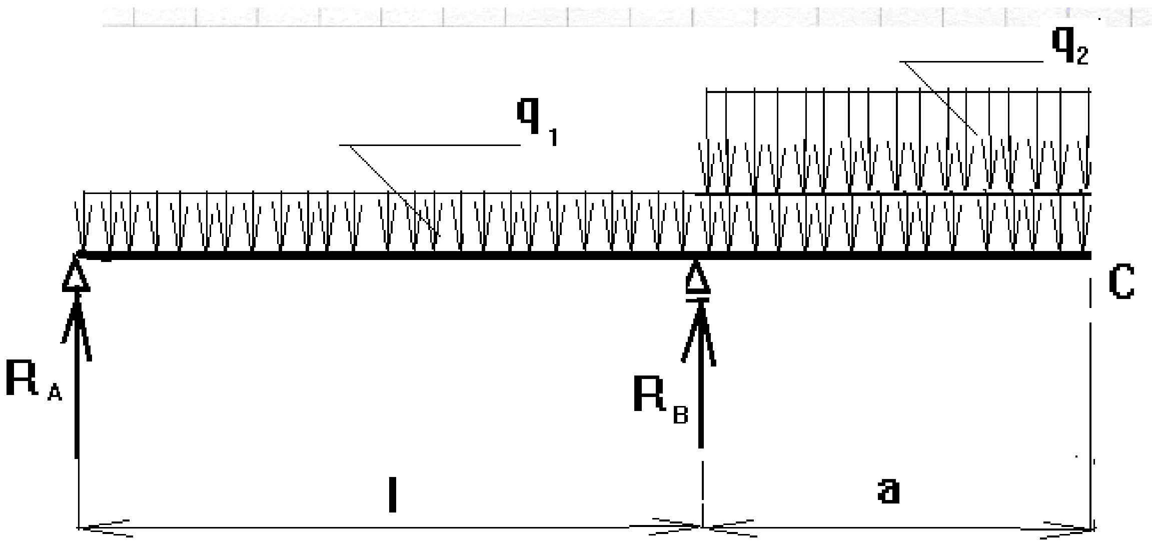
# ZAWODY II STOPNIA

## ROZWIĄZANIA ZADAŃ Z GRUPY MECHANICZNO-BUDOWLANEJ

### 1) Rozwiązanie zadania nr 1 Belka

W pierwszej kolejności trzeba wyznaczyć reakcję $R_A$ na podporze *A*.

Z równania równowagi wynikających z sumy momentów zginających względem podpory *B* otrzymujemy rys. 2):




Rysunek 2

$$\sum M_B = 0$$

$$R_A \cdot l - \frac{q_1 \cdot l^2}{2} + \frac{(q_1 + q_2) \cdot a^2}{2} = 0 \qquad (1)$$

Zatem:

$$R_A = \frac{q_1 \cdot l}{2} - \frac{(q_1 + q_2) \cdot a^2}{2 \cdot l} \qquad (2)$$

Aby na podporze *A* nie było odrywania (czyli aby reakcja $R_A$ było co najwyżej równa 0), maksymalna wartość obciążenia $q_2$ musi być taka, aby spełniony był warunek:

$R_A = 0$ (3)

Mamy więc z (2):

$$\frac{q_1 \cdot l}{2} - \frac{(q_1 + q_2) \cdot a^2}{2 \cdot l} = 0$$

skąd:

$$q_2 = q_1 \cdot \left(\frac{l^2}{a^2} - 1\right) \quad (4)$$

Po wstawieniu do (4) wartości $l$ = 5m i $a$ = 2m, otrzymujemy:

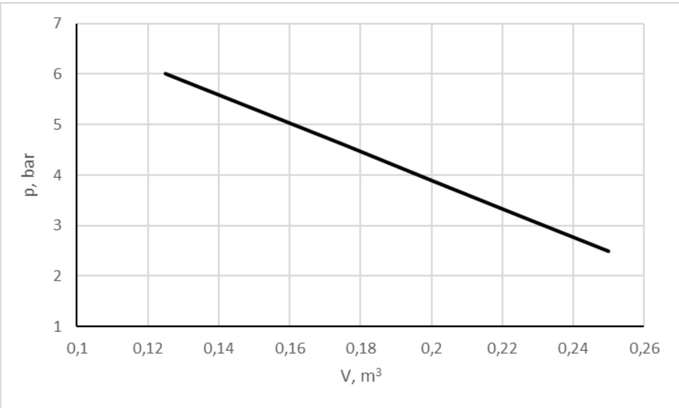
$q_2 = 5{,}25\ q_1$

Jest to odpowiedź na pierwsze pytanie w treści zadania.

Odpowiedź na drugie pytania łatwo jest zgadnąć (lub obliczyć w sposób analogiczny do przedstawionego wyżej)), bo aby na podporze *A* nie było odrywania pod działaniem obciążenia $q_1$ , to największa długość wspornika powinna być równa $l$.

**2) Rozwiązanie zadania nr 2 Podnośnik pneumatyczny**

Wykres p-V dla analizowanego procesu:




Temperaturę powietrza na początku i na końcu przemiany można wyznaczyć z równania Clapeyrona:

$$T = \frac{p \cdot V}{m \cdot R}$$

Po podstawieniu danych: $T_1$ = 290,4°C, $T_2$ = 348,4°C.

Porównując wykres p-V analizowanej przemiany z wykresem przemiany izotermicznej (hiperbola) można wnioskować, że temperatura powietrza będzie początkowo szybko rosła, a pod koniec przemiany zmniejszy się do wyznaczonej wartości $T_2$.
Ciepło przemiany można wyznaczyć z bilansu energii, tzn. z I zasady termodynamiki:

$$Q = \Delta U - W$$

Gdzie: $\Delta U$ – zmian energii wewnętrznej; $W$ – praca wykonana nad gazem.
Zmiana energii wewnętrznej:

$$\Delta U = m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1)$$

Ciepło właściwe przy stałej objętości

$$c_v = \frac{5}{2} R$$

Po podstawieniu danych liczbowych:

$c_v$ = 717,5 J/(kg·K)

$\Delta U$ = 31,25 kJ

Pracę sprężania w ogólnym przypadku wyznacza się całkując wyrażenie $p \cdot dV$. Graficzną interpretacją tej całki jest pole pod krzywą przemiany na wykresie p-V. W tym przypadku można wykorzystać tę właściwość i policzyć pracę z zależności:

$$W = (V_2 - V_1) \cdot (p_1 + p_2)/2$$

Po podstawieniu danych otrzymuje się:

$W$ = 53,125 kJ.

W tym przypadku zastosowano konwencję znaku pracy przyjętą w fizyce; w termodynamice technicznej praca ta byłaby ujemna.

Wracając do bilansu energii wyznacza się wartość ciepła:

$Q = \Delta U - W$ = -21,88 kJ

Oznacza to, że w czasie sprężania powietrza cylinder należ chłodzić odprowadzając 21,88 kJ ciepła.

Maksymalna temperaturę oraz moment jej wystąpienia można wyznaczyć analizując funkcję zmian temperatury w zależności od objętości.

Zależność ciśnienia od objętości opisuje funkcja:

$$p = a + b \cdot V$$

Z wartości p i V dla stanu 1 i 2 można wyznaczyć współczynniki w tym równaniu:
a = 9,5 bar; b = -28 1 bar/m$^3$

Z równania Clapeyrona

$$T = \frac{p \cdot V}{m \cdot R}$$

Podstawiając do tego równania zależność $p(V)$ otrzymuje się:

$$T = \frac{1}{m \cdot R}(a \cdot V + b \cdot V^2)$$

Maksymalna temperatura powietrza występuje wtedy, kiedy pochodna tej funkcji osiąga wartość 0, tzn.:

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{m \cdot R}(a + 2 \cdot b \cdot V) = 0$$

Warunek ten jest spełniony dla

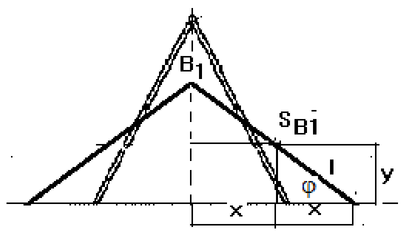
$$V = -\frac{a}{2 \cdot b} = 0{,}17\ m^3$$

Wartość maksymalnej temperatury wynosi $T_{max}$ = 374,4°C.

## 3. Rozwiązanie zadania nr 3  Drabina

Energia kinetyczna drabiny przy opadaniu wynosi:

$$E_{kin} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(M \cdot \dot{x}^2 + M \cdot \dot{y}^2 + M \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi}^2\right) = M \cdot \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + r^2 \cdot \dot{\varphi}^2\right) \qquad (1)$$




Rysunek 3

wykorzystując rysunek 3 mamy następujące relacje:

$$x^2 = l^2 - y^2 \qquad (2)$$

oraz: $$\sin\varphi = \frac{y}{l} \qquad (3)$$

z (2) różniczkując po czasie otrzymamy:

$$2 \cdot x \cdot \dot{x} = -2 \cdot y \cdot \dot{y}$$

$$\dot{x} = -\frac{y}{x} \cdot \dot{y} \qquad \dot{x}^2 = \frac{y^2}{l^2 - y^2} \cdot \dot{y}^2 \qquad (4)$$

z (3) różniczkując po czasie otrzymamy:

$$\dot{\varphi} \cdot \cos\varphi = \frac{\dot{y}}{l} \qquad \dot{\varphi}^2 = \frac{\dot{y}^2}{l^2 \cdot \cos^2\varphi} = \frac{\dot{y}^2}{l^2 - y^2} \qquad (5)$$

$$E_{kin} = M \cdot \left(\dot{y}^2 + \frac{y^2}{l^2 - y^2} \cdot \dot{y}^2 + \frac{r^2}{l^2 - y^2} \cdot \dot{y}^2\right) = M \cdot \frac{l^2 + r^2}{l^2 - y^2} \cdot \dot{y}^2 \qquad (6)$$

energię kinetyczną zyskujemy kosztem energii potencjalnej, której zmiana przy obniżeniu środków ciężkości z wysokości ***h***/2 na wysokość y wynosi:

$$\Delta E_{pot} = 2 \cdot M \cdot g \cdot (\frac{h}{2} - y) = M \cdot g \cdot (h - 2 \cdot y) \qquad (7)$$

i stąd ponieważ $E_{kin} = \Delta E_{pot}$

$$M \cdot \frac{l^2 + r^2}{l^2 - y^2} \cdot \dot{y}^2 = M \cdot g \cdot (h - 2 \cdot y) \qquad (8)$$

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{g\cdot(h-2\cdot y)\cdot(l^2-y^2)}{l^2+r^2}} \tag{9}$$

prędkość punktu B jest dwa razy większa niż prędkość środka ciężkości:

$$v_B = 2\cdot\dot{y}$$

$$v_B = 2\cdot\sqrt{\frac{g\cdot(h-2\cdot y)\cdot(l^2-y^2)}{l^2+r^2}} \tag{10}$$

1) gdy punkt B osiąga podłogę to dla środka ciężkości y=0

$$v_B = 2\cdot\sqrt{\frac{g\cdot h\cdot l^2}{l^2+r^2}} = 2\cdot l\cdot\sqrt{\frac{g\cdot h}{l^2+r^2}}$$

$$v_B = 2\cdot 1{,}5\cdot\sqrt{\frac{9{,}81\cdot 2{,}8}{1{,}5^2+0{,}9^2}} = 9\,m/s$$

2) gdy punkt B znajduje się na wysokości ***h***/2 to środek ciężkości znajduje się na wysokości y=***h***/4

$$v_B = 2\cdot\sqrt{\frac{g\cdot(h-\frac{h}{2})\cdot(l^2-\frac{h^2}{16})}{l^2+r^2}} = 2\cdot\sqrt{\frac{g\cdot h\cdot(16\cdot l^2-h^2\}}{2\cdot 16\cdot(l^2+r^2)}}$$

$$v_B = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{9{,}81\cdot 2{,}8\cdot(16\cdot 1{,}5^2-2{,}8^2)}{2\cdot(1{,}5^2+0{,}9^2)}} = 5{,}6\text{ m/s}$$