XXXVI OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

Zawody III stopnia

Rozwiązania zadań dla grupy mechaniczno-budowlanej

Rozwiązanie zadania 1

Wyznaczenie reakcji $R_A = R_B$ (symetria geometrii i obciążenia)

Suma momentów względem punktu B:

$$\sum M = 0\,, \qquad R_A\, d - q\,(x+d)\,\frac{1}{2}\,(x+d) + \frac{1}{2}\,q\,x^2 = 0\,.$$

Po wykonaniu działań i uporządkowaniu, otrzymujemy:

$$R_A = q\,\left(x + \frac{1}{2}\,d\right)\,. \tag{1}$$

Odpowiedź na pytanie 1

Maksymalne momenty zginające mogą wystąpić albo w punkcie (przekroju) A (maksymalny moment podporowy) albo w punkcie (przekroju) C (maksymalny moment przęsłowy). Z treści pytania wynika warunek:

$$M_A = M_C\,, \tag{2}$$

$$M_A = q\,\frac{x^2}{2}\,, \tag{3}$$

$$M_C = R_A\,\frac{d}{2} - q\left(x + \frac{d}{2}\right)\,\frac{1}{2}\left(x + \frac{d}{2}\right),$$

skąd po uporządkowaniu mamy:

$$M_C = \frac{1}{8}\,q\,\left(d^2 - 4\,x^2\right)\,. \tag{4}$$

Warunek (2) przybiera zatem formę:

$$q\,\frac{x^2}{2} = \frac{1}{8}\,q\,\left(d^2 - 4\,x^2\right)\,. \tag{5}$$

Po rozwiązaniu i uporządkowaniu równania (5), mamy ostatecznie:

$$x = \frac{d}{\sqrt{8}} = 0,3536\,d\,. \tag{6}$$

Pamiętając (patrz rys 1), że:

$$l = d + 2\,x\,, \tag{7}$$

i podstawiając (7) do (6), otrzymujemy:

$$x = 0,3536\,(l - 2\,x)\,,$$

$$1,7072\,x = 0,3536\,l\,,$$

$$x = 0,207\,l\,. \tag{8}$$

Wstawiając do (8) $l = 10$ m, mamy:

$$x = 2,07\ \mathrm{m}\,. \tag{9}$$

Odpowiedź na pytanie 2

Z treści pytania wynikają warunki:

$$M_A = q\,\frac{l^2}{12}\,, \tag{10}$$

oraz

$$M_C = q\,\frac{l^2}{12}\,, \tag{11}$$

Ze względu na symetrię przekroju poprzecznego (por. uwaga c) decydować będzie większa wartość momentu zginającego w belce obustronnie utwierdzonej.

Z (3) i (10) otrzymujemy

$$x = \frac{l}{\sqrt{6}} = 0,4082\,l = 4,08\ \mathrm{m}\,. \tag{12}$$

Z (4) i (11) otrzymujemy

$$x = \frac{l}{12} = 0,0833\,l = 0,833\ \mathrm{m}\,. \tag{13}$$

Widać zatem, że jeśli spełniony będzie warunek wyrównania momentów (10), (11), to momenty w belce dwuwspornikowej nie przekroczą maksymalnej wartości momentow występujących w belce obustronnie utwierdzonej.

Rozwiązanie zadania 2

Zgodnie z rysunkiem 2 mamy:

$$\left(r_2 + r_2 \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right) - \left(r_1 + r_1 \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right) = B - A\,,$$

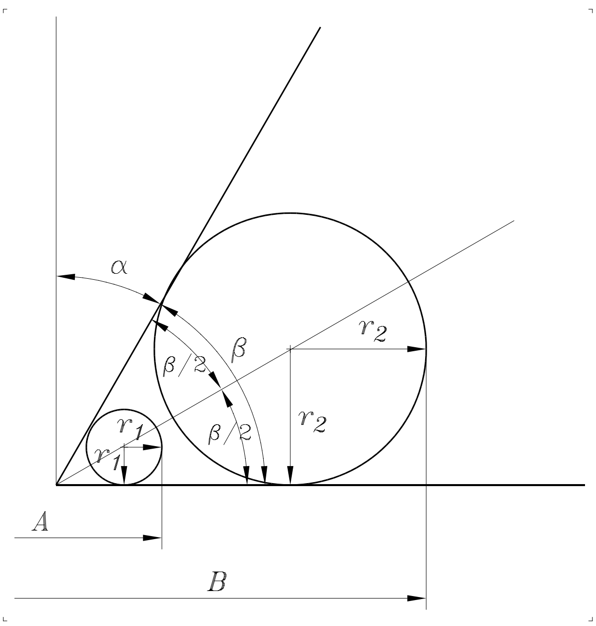
$$\left(r_2 - r_1\right)\left(1 + \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right) = B - A\,,$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{B-A}{r_2 - r_1} - 1\,.$$

Z przyczyn rachunkowych (brak funkcji cotangens w kalkulatorach) wzór powyższy przekształcamy do postaci:

$$\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \left(\frac{B-A}{r_2 - r_1} - 1\right)^{-1}\,,$$

$$\beta = 2\,\mathrm{arc\,tg}\left[\frac{2\,(B-A)}{d_2 - d_1} - 1\right]^{-1}\,. \qquad (*)$$



Rys.2

Wartość nominalna kąta β:

$$\beta_{nom} = 2\cdot\mathrm{arc\,tg}\left[\frac{2\cdot(80-30)}{50-10} - 1\right]^{-1} = 2\cdot\mathrm{arc\,tg}\,1,5^{-1} = 2\cdot\mathrm{arc\,tg}\,0,6667 = 67,3801^\circ\,,$$

$$\beta_{nom} = 67^\circ 23' :$$

$$\alpha_{nom} = 90^\circ - \beta_{nom} = 90^\circ - 67^\circ 23' = 22^\circ 37'\,.$$

Tolerancje zostaną wyznaczone przy wykorzystaniu wzoru (*) poprzez obliczenie maksymalnych i minimalnych warości kąta β. Można je również wyznaczyć wykorzystując rachunek różniczkowy i teorię błędu, ale w tym przypadku jest to metoda znacznie bardziej pracochłonna.

Wartość $\beta_{\max}$ otrzymuje się minimalizując w nawiasach licznik i maksymalizując mianownik i stąd:

$$\beta_{\max} = 2\,\mathrm{arc\,tg}\left[\frac{2\left(B_{\min} - A_{\max}\right)}{d_{2\max} - d_{1\min}} - 1\right]^{-1} =$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 \cdot \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\cdot(79,995-30,005)}{50-9,995}-1\right]^{-1} = \\
&= 2 \cdot \operatorname{arc\,tg} 1,4992^{-1} = 67,4088^\circ\,.
\end{aligned}
$$

Wartość $\beta_{\max}$ otrzymuje się maksymalizując w nawiasach licznik i minimalizując mianownik i stąd:

$$
\begin{aligned}
\beta_{\min} &= 2 \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\left(B_{\max}-A_{\min}\right)}{d_{2\min}-d_{1\max}}-1\right]^{-1} = \\
&= 2 \cdot \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\cdot(80,005-29,995)}{49,995-9,995}-1\right]^{-1} = \\
&= 2 \cdot \operatorname{arc\,tg} 1,5008^{-1} = 67,3515^\circ\,.
\end{aligned}
$$

Odchyłka górna wynosi:

$$\beta_2 = \beta_{\max} - \beta_{nom} = 67,4088^\circ - 67,3801^\circ = 0,0287^\circ = 1'43''\,.$$

Odchyłka dolna wynosi:

$$\beta_1 = \beta_{\min} - \beta_{nom} = 67,3515^\circ - 67,3801^\circ = -0,0286^\circ = -1'43''\,.$$

Ponieważ tolerancja i odchyłki kąta prostego wynoszą zero więc, ponieważ $\alpha = 90^\circ - \beta$:

$$\alpha_1 = \beta_1 = -1'43'' : \qquad \alpha_2 = \beta_2 = 1'43'' :$$

Tolerancja kąta α wynosi:

$$T_\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 1'43'' - (-1'43'') = 3'26''\,.$$

Ostatecznie:

$$\alpha = 22^\circ 37'^{\,\pm 1'43''}\,.$$

Rozwiązanie zadania 3

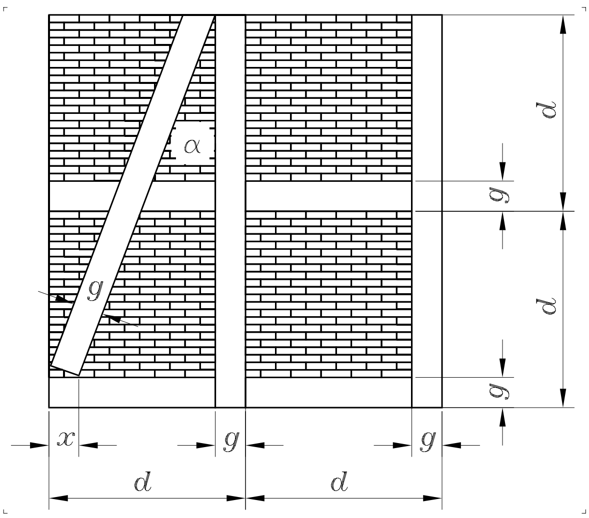
Jedną z metod rozwiązanie zadania jest wyliczenie przepływającego strumienia ciepła przy dowolnej różnicy temperatur $\Delta\, T$ przez powtarzający się fragment muru. Rys.3 przedstawia powtarzający się fragment muru (identyczny drugi powstaje przez odbicie jego w lustrze). Taki wybór został dokonany ze względu na planowane okna. Całkowita powierzchnia fragmentu:

$$F = (2\, d)^2 = (2 \cdot 1)^2 = 4\ \mathrm{m}^2 .$$

Obliczenie powierzchni elementu ceglanego wymaga wyznaczenia kąta α

$$\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{d - g - x}{2\, d - g} \,; \qquad x = \frac{g}{\cos\ \alpha} \,,$$

$$\mathrm{tg}\, \alpha\ (2\, d - g) = d - g - \frac{g}{\cos\ \alpha} \,,$$



Rys.3

$$\sin\ \alpha\, (2\, d - g) = (d - g)\ \cos\ \alpha - g \,,$$

$$\sin^2\ \alpha\, (2\, d - g)^2 = (d - g)^2\ \cos^2\ \alpha - 2\, (d - g)\, g\ \cos\ \alpha + g^2 \,,$$

$$\left[(2\, d - g)^2 + (d - g)^2 \right]\ \cos^2\ \alpha - 2\, (d - g)\, g\ \cos\ \alpha + g^2 - (2\, d - g)^2 = 0 \,,$$

$$\left[(2 \cdot 1 - 0,12)^2 + (1 - 0,12)^2 \right] \cdot \cos^2\ \alpha - 2 \cdot (1 - 0,12) \cdot 0,12 \cdot \cos\ \alpha + 0,12^2 - (2 \cdot 1 - 0,12)^2 = 0 \,,$$

$$4,3088 \cdot \cos^2\ \alpha - 0,2112 \cdot \cos\ \alpha - 3,52 = 0 \,,$$

$$\cos\ \alpha = \frac{0,2112 + \sqrt{0,2112^2 + 4 \cdot 4,3088 \cdot 3,52}}{2 \cdot 4,3088} = 0,9287 \,.$$

(drugi pierwiastek jest ujemny i nie spełnia warunków zadania – poszukujemy kąta ostrego)

$$\alpha = \mathrm{arc}\ \cos\ 0,9287 = 21,77^\circ \,.$$

Powierzchnia ceglanego trójkąta:

$$F_1 = 0,5\ (d - g)^2\ \mathrm{tg}\, \alpha = 0,5 \cdot 0,88^2 \cdot 0,3994 = 0,155\ \mathrm{m}^2 \,.$$

Powierzchnia ceglanego trapezu:

$$\begin{aligned} F_2 &= 0,5\ [d \operatorname{tg}\alpha + (2\,d - g)\operatorname{tg}\alpha]\ (d-g) = \\ &= 0,5 \cdot (3 \cdot d - g) \cdot (d-g) \cdot \operatorname{tg}\alpha = \\ &= 0,5 \cdot 2,88 \cdot 0,88 \cdot 0,3994 = 0,506\,. \end{aligned}$$

Powierzchnia ceglanego kwadratu:

$$F_3 = (d-g)^2 = 0,88^2 = 0,774\ \mathrm{m}^2\,.$$

Powierzchnia ceglanego muru

$$F_{c1} = 2\ \Big(F_1 + F_2 + F_3\Big) = 2 \cdot (0,155 + 0,506 + 0,774) = 2,87\ \mathrm{m}^2\,.$$

Powierzchnia czołowa belek:

$$F_d = F - F_{c1} = 4 - 2,87 = 1,13\ \mathrm{m}^2\,.$$

Opór przewodzenia i przejmowania ciepła muru ceglanego:

$$R_{c\lambda} = \frac{g}{\lambda_c} = \frac{0,25}{0,62} = 0,4032\ \mathrm{m}^2\mathrm{K/W}\,,$$

$$R_{cU} = R_{si} + R_{c\lambda} + R_{se} = 0,13 + 0,4032 + 0,04 = 0,5732\ \mathrm{m}^2\mathrm{K/W}\,.$$

Strumień ciepła przepływający przez mur ceglany o powierzchni F_{c1}:

$$\dot{Q}_{c1} = \frac{F_{c1}\,\Delta\,T}{R_{cU}} = \frac{2,87}{0,5732} \cdot \Delta\,T = 5,01 \cdot \Delta T\ \mathrm{W}\,.$$

Opór przewodzenia i przejmowania ciepła belek drewnianych

$$R_{d\lambda} = \frac{g}{\lambda_d} = \frac{0,25}{0,16} = 1,5625\ \mathrm{m}^2\mathrm{K/W}\,,$$

$$R_{dU} = R_{si} + R_{d\lambda} + R_{se} = 0,13 + 1,5625 + 0,04 = 1,7325\ \mathrm{m}^2\mathrm{K/W}\,.$$

Strumień ciepła przepływający przez belki drewniane o powierzchni F_d:

$$\dot{Q}_d = \frac{F_d\,\Delta\,T}{R_{dU}} = \frac{1,13}{1,7325} \cdot \Delta\,T = 0,652 \cdot \Delta\,T\ \mathrm{W}\,.$$

Całkowity strumień ciepła przepływający przez wybrany fragment muru:

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_{c1} + \dot{Q}_d = 5,01 \cdot \Delta T + 0,652 \cdot \Delta T = 5,662 \cdot \Delta T\,.$$

Przy murze z okienkami każdy powtarzający się fragment muru zawiera jedno okienko o powierzchni:

$$F_{ok} = s^2 = 0,5^2 = 0,25\,\mathrm{m}^2\,.$$

Powierzchnia ceglanego muru wynosi teraz:

$$F_{c2} = F_{c1} - F_{ok} = 2,87 - 0,25 = 2,62\,\mathrm{m}^2\,.$$

Powierzchnia belek nie ulega zmianie, a stąd nie ulega zmianie i strumień ciepła.
Strumień ciepła przepływający przez mur ceglany o powierzchni F_{c2}:

$$\dot{Q}_{c2} = \frac{F_{c2}\,\Delta T}{R_{cU}} = \frac{2,62}{0,5732} \cdot \Delta T = 4,57 \cdot \Delta T\ \mathrm{W}.$$

Strumień ciepła przepływający przez okienko

$$\dot{Q} = U_{ok}\,F_{ok}\,\Delta T = 2,6 \cdot 0,25 \cdot \Delta T = 0,65 \cdot \Delta T$$

Całkowity strumień ciepła przepływający przez wybrany fragment muru z okienkiem:

$$\dot{Q}_2 = \dot{Q}_{c2} + \dot{Q}_d + \dot{Q}_{ok} = 4,57 \cdot \Delta T + 0,652 \cdot \Delta T + 0,65 \cdot \Delta T = 5,872 \cdot \Delta T$$

Procentowa zmiana straty ciepła

$$\delta = \frac{\dot{Q}_2 - \dot{Q}_1}{\dot{Q}_1} = \frac{5,872 \cdot \Delta T - 5,662 \cdot \Delta T}{5,662 \cdot \Delta T} = 0,037 \qquad \delta = 3,7\,\%$$

Strata ciepła zwiększy się o około 3,7 %.

Przykładowe rozwiązanie problemu technicznego

Cześć obliczeniowa:

1. Moc cieplna systemu:

$$P = A\,\alpha\,\left(t_p - t_0\right) = a\,b\,\alpha\,\left(t_p - t_0\right)\ ,$$

   gdzie: A – pole powierzchni boiska, a – długość, b – szerokość, inne oznaczenia w treści zadania.

$$P = 105 \cdot 72 \cdot 25 \cdot (5 - 0) = 984\,\mathrm{kW}.$$

2. Temperatura na głębokości źródła ciepła (z prawa Fouriera opisującego przewodzenie ciepła w gruncie; strumień ciepła przewodzonego jest taki sam jak strumień ciepła przekazywanego na drodze przejmowania do powietrza):

$$\lambda\,\frac{t_d - t_p}{d} = \alpha\,\left(t_p - t_0\right)\ ,$$

$$t_d = t_p + \frac{\alpha\,d}{\lambda}\,\left(t_p - t_0\right) = 5 + \frac{25 \cdot 0,25}{0,8} \cdot (5 - 0) = 44^\circ\mathrm{C}.$$

3. Wydatek czynnika roboczego w cieczowym wymienniku ciepła:

$$\dot{m}\,c_p\,\Delta\,t = P\ ,$$

$$\dot{m} = \frac{P}{c_p\,\Delta\,t} = \frac{984000}{3000 \cdot 15} = 21,9\ \mathrm{kg/s}\ .$$

4. Wady i zalety systemów (wybrane):

   a) elektryczny: mała bezwładność systemu, łatwość obsługi i sterowania, jednorodny rozkład strumienia, a tym samym temperatury ogrzewanej powierzchni; wadą może być droga energia elektryczna,

   b) wymiennik cieczowy: duża bezwładność cieplna – długi czas rozruchu, niejednorodna temperatura ogrzewanej powierzchni (wynikająca ze spadku temperatury czynnika), możliwe problemy eksploatacyjne związane z rozszczelnieniem systemu; możliwość wykorzystania taniej energii w przypadku korzystania z systemów scentralizowanego ogrzewania (z elektrociepłowni).

Problem:

Potencjalnymi niekonwencjonalnymi źródłami energii są:

- Energia promieniowania słonecznego zarówno dla układów elektrycznych (panele fotowoltaiczne) jak i cieczowych (klasyczne: kolektor słoneczny),
- Energia wiatru – dla zasilania elektrycznego
- Energia geotermalna – dla systemu cieczowego.

Energia promieniowania słonecznego

W miesiącach zimowych (a tylko te są brane pod uwagę) to źródło energii jest bardzo ograniczone, co wynika z niskich wartości natężenie promieniowania, krótkich czasów operowania Słońca jak również stosunkowo długich okresów zachmurzenia. Wykorzystanie tego źródła energii do podgrzewania czynnika roboczego w systemie cieczowym wymagałoby zainstalowania kolektorów słonecznych o bardzo dużej powierzchni, wielokrotnie większej niż powierzchnia boiska, jak również akumulacji pozyskanego ciepła – przez zwiększenie ilości czynnika roboczego i o jego podgrzaniu w dni słoneczne, a następnie przechowywanie go w dużych, zaizolowanych zbiornikach.

Biorąc pod uwagę tylko te czynniki wydaje się, że wykorzystanie promieniowania słonecznego jest nieuzasadnione. Ty bardziej jako źródło energii elektrycznej przy użyciu paneli fotowoltaicznych, ze względu na ich cenę i niską sprawność (ich powierzchnia musiałaby być znacznie większa niż klasycznych kolektorów).

Energia wiatru

Biorąc pod uwagą wielkość zapotrzebowania na moc (poniżej 1 MW) i parametry współczesnych turbin wiatrowych widać, że potrzebną energię można uzyskać z jednego, średniej wielkości „wiatraka". Ponieważ jednak wiatr czasami nie wieje, i okresy takie są nieprzewidywalne, przy takim wariancie konieczne byłoby „przewymiarowanie" systemu, oraz zainstalowanie elementów akumulujących energię, bądź to w postaci zasobników ciepła, bądź też w postaci baterii akumulatorów elektrycznych. W każdym przypadku prowadziłoby to do znacznego podniesienia kosztów ogrzewania.

Energia geotermalna

To źródło energii wydaje się być najbardziej obiecującym. Dostęp do niego nie jest ograniczony czasowo. Odwierty geotermalne można wykonać w obrębie obiektu sportowego. Konieczne byłoby zainstalowanie pomp ciepła podnoszących temperaturę czynnika roboczego. Energia ta oczywiście może być wykorzystana tylko w układach z wymiennikami cieczowymi.