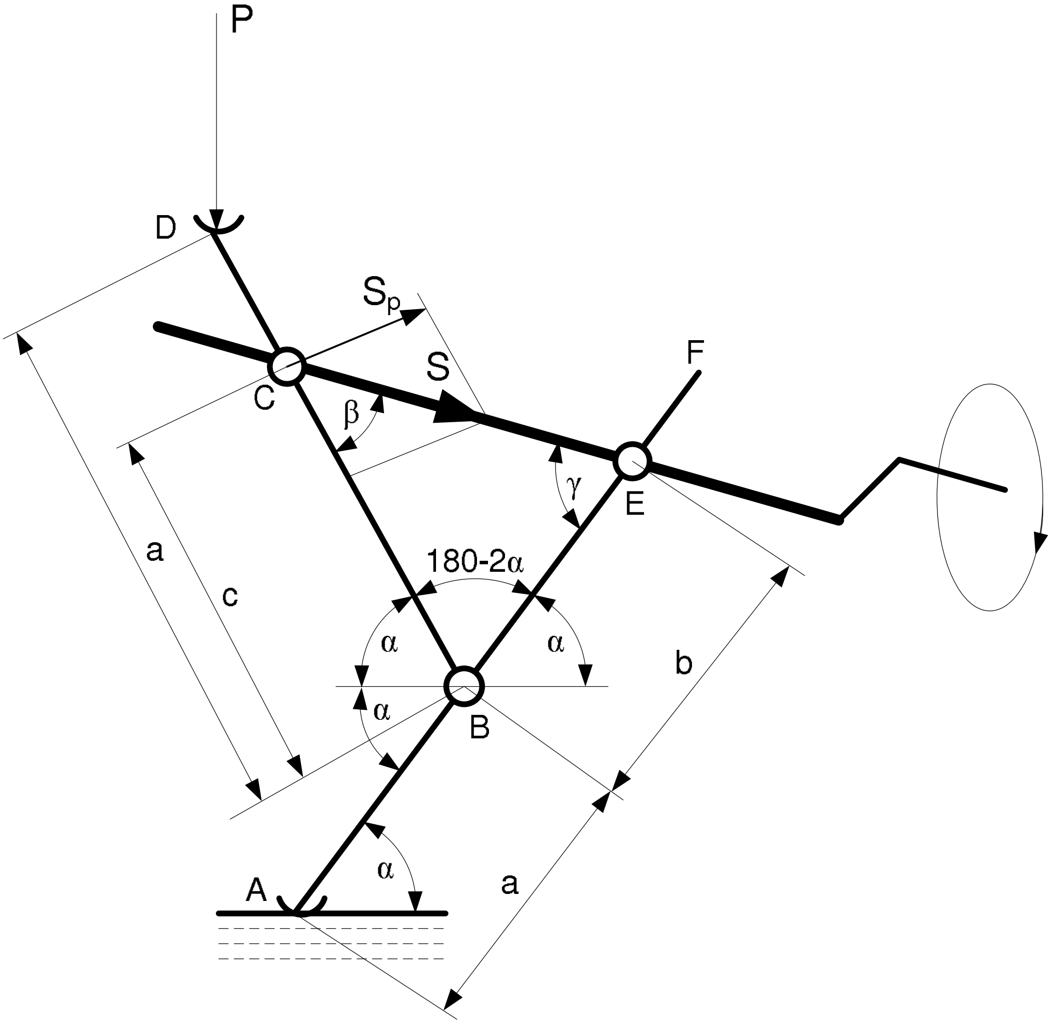
XXXVI OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

Zawody II stopnia

Rozwiązania zadań dla grupy mechaniczno-budowlanej

Rozwiązanie zadania 1

Punkt D będzie znajdował się w pionie nad punktem A, a dodatkowo równość ramion DB i AB prowadzi do układu kątów przedstawionego na rysunku.



Jedyny potrzebny warunek równowagi podnośnika to dla puntu B:

$$\sum M = 0\,, \qquad \Rightarrow \qquad P \cdot a \cdot \cos\alpha - S_p \cdot c = 0\,, \qquad \Rightarrow \qquad P \cdot a \cdot \cos\alpha - S \cdot c \cdot \sin\beta = 0\,.$$

stąd:

$$S = P \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\,. \qquad (*)$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkata CBE:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\,,$$

ale ponieważ $\gamma = 2\cdot\alpha - \beta$ (suma kątów w trójkącie równa 180°) więc

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin(2\cdot\alpha - \beta)}\,,$$

i kolejno przekształcając:

$$\sin(2\cdot\alpha - \beta) = \frac{c}{b}\cdot\sin\beta\,.$$

Wykorzystując wzór na sinus różnicy:

$$\sin(2\cdot\alpha)\cdot\cos\beta - \cos(2\cdot\alpha)\cdot\sin\beta = \frac{c}{b}\cdot\sin\beta\,,$$

$$\sin(2\cdot\alpha)\cdot\cos\beta = \left[\cos(2\cdot\alpha) + \frac{c}{b}\right]\cdot\sin\beta\,,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(2\cdot\alpha)}{\cos(2\cdot\alpha) + \frac{c}{b}}\,.$$

Ponieważ:

$$\sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}\,,$$

więc:

$$\sin\beta = \frac{\sin(2\cdot\alpha)}{\sqrt{\cos^2(2\cdot\alpha) + 2\cdot\cos(2\cdot\alpha)\cdot\frac{c}{b} + \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \sin^2(2\cdot\alpha)}}$$

$$\sin\beta = \frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sqrt{1 + 2\cdot\cos(2\cdot\alpha)\cdot\frac{c}{b} + \left(\frac{c}{b}\right)^2}}\,.$$

Podstawiając otrzymane wyrażenie do (*) otrzymuje się poszukiwaną relację:

$$S = P \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{\sqrt{1 + 2 \cdot \cos(2 \cdot \alpha) \cdot \frac{c}{b} + \left(\frac{c}{b}\right)^2}}{2 \cdot \sin \alpha},$$

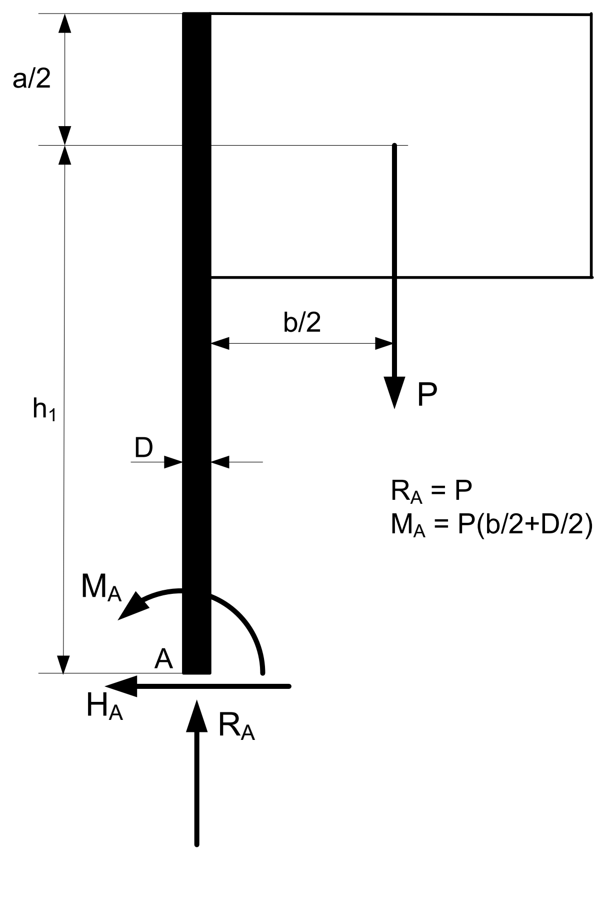
$$S = 5000 \cdot \frac{0,18}{0,12} \cdot \frac{\sqrt{1 + 2 \cdot \cos 120^{\circ} \cdot \frac{0,12}{0,10} + \left(\frac{0,12}{0,10}\right)^2}}{2 \cdot \sin 60^{\circ}} = 4822 \text{ N}.$$

Przy kącie $\alpha = 60^{\circ}$ i przy obciążeniu podnośnika siłą $P = 5000$ N siła działająca wzdłuż śruby wynosi $S = 4822$ N.

Rozwiązanie zadania 2

Pytanie 1

Schemat, który należy rozpatrzyć pokazano na rys.2. Największe siły i momenty zginające występują w przekroju zamocowania słupa.



Z warunków równowagi wynika, że:

$$R_A = P\,; \qquad H_A = 0\,; \qquad M_A = P \cdot \left(\frac{b}{2} + \frac{D}{2} \right)\,. \tag{1}$$

Naprężenia od ściskania słupa są (przy pominięciu jego ciężaru własnego – patrz wskazówka 1) są równe:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{P}{A} = \frac{P \cdot 4}{\pi\,\left(D^2 - d^2\right)} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4}{\pi\,\left(0,18^2 - 0,16^2\right)} = \\ &= \frac{8000}{0,02136} = 374531,84 \text{ N/m}^2 = 0,374 \text{ MPa}. \end{aligned} \tag{2}$$

Naprężenia od zginania słupa są równe:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \pm\frac{M_A}{W_x} = \pm\frac{P \cdot (0,5\,b + 0,5\,D) \cdot 32 \cdot D}{\pi\,\left(D^4 - d^4\right)} = \pm\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,5\,\,(3,0 + 0,18) \cdot 32 \cdot 0,18}{\pi\,\left(0,18^4 - 0,16^4\right)} = \\ &= \pm\frac{18316,8}{0,00123904} = \pm\,14783058 \text{ N/m}^2 = \pm\,14,783 \text{ MPa}. \end{aligned} \tag{3}$$

W sumie więc mamy (2) + (3):

$$\sigma_{max} = 0,374\,\pm\,14,783 = \begin{array}{c} +\,15,157 \text{ MPa} \\ -\,14,409 \text{ MPa} \end{array} < \; k = 150 \text{ MPa}. \tag{4}$$

Widać zatem, że naprężenia są bardzo dalekie od wartości dozwolonej.

<u>Pytanie 2</u>

$$\tau_{max} = \frac{M_{skr}}{W_0}\,. \tag{5}$$

Moment skręcający:

$$M_{skr} = w\;a\;b\;(0,5\,b + 0,5\,D) = 2,5 \cdot 10^3 \cdot 2,0 \cdot 3,0 \cdot 0,5\,(3,0 + 0,18) = 23850 \text{ Nm}. \tag{6}$$

$$W_0 = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{16\,D} = \frac{\pi\left(0,18^4 - 0,16^4\right)}{16 \cdot 0,18} = \frac{0,00123904}{2,88} = 0,00043022\ \mathrm{m}^3. \tag{7}$$

Z (5), (6) i (7) otrzymujemy:

$$\tau_{max} = \frac{23850}{0,00043022} = 55436282\ \mathrm{N/m}^2 = 55,436\ \mathrm{MPa}\ <\ k_t = 90\ \mathrm{MPa}. \tag{8}$$

Jest to wartość wyraźnie mniejsza od dozwolonej, ale bliższa jej niż w przypadku poprzednim. Wpływ wiatru na stan naprężenia jest znacznie większa od ciężaru własnego konstrukcji.

Pytanie 3

$$\begin{aligned}\varphi_{max} &= \frac{M_{skr}\,h \cdot 64}{G\,\pi\left(D^4 - d^4\right)} = \frac{23850 \cdot 5 \cdot 64}{8,1 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot \left(0,18^4 - 0,16^4\right) \cdot 10^6} = \\ &= \frac{7632000}{0,01003622 \cdot 10^{10}} = 0,0760415\ \mathrm{rad}.\end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{\varphi_{max}}{h} = \frac{0,0760415}{5} = 0,0152083\ \mathrm{rad/m}\ <\ \frac{\varphi_{doz}}{h} = 0,08\ \mathrm{rad/m}. \tag{10}$$

Wszystkie warunki zadania zostały więc spełnione przy założonych wymiarach słupa. Zwraca uwagę duże znaczenie parcia wiatru.

Rozwiązanie zadania 3

Strumień ciepła między zbiornikiem a otoczeniem powodujący spadek temperatury wody z podaną szybkością ($s = \Delta\,T/\Delta\,t$)

$$Q = \rho\,V\,c_w\,(\Delta\,T/\Delta\,t)\,,$$

gdzie V jest objętością zbiornika:

$$V = \frac{\pi\,d^2}{4}\,h = \frac{3,14 \cdot 0,4^2}{4} \cdot 1 = 0,1257\ \mathrm{m}^3\,,$$

$$Q = \rho \, V \, c_w \, (\Delta \, T / \Delta \, t) = \frac{1000 \cdot 0,126 \cdot 4,19 \cdot 3}{3600} = 0,4388 \, \mathrm{kW}$$

Wyznaczony strumień ciepła jest wymieniany z otoczeniem na drodze przewodzenia przez warstwę izolacji (o poszukiwanej grubości δ) oraz na drodze przejmowania z powierzchni zewnętrznej:

$$Q = \frac{T_w - T_0}{R} \, ,$$

gdzie R jest oporem cieplnym, który przy podanych uproszczeniach określony jest zależnością:

$$R = \frac{1}{A \, \alpha} + \frac{\delta}{A \, \lambda} \, ,$$

A jest powierzchnią wymiany ciepła

$$A = 2 \, \frac{\pi \, d^2}{4} + \pi \, d \, h = 2 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,4^2}{4} + 3,14 \cdot 0,4 \cdot 1 = 1,508 \, \mathrm{m}^2$$

Grubość warstwy izolacji:

$$\delta = \left(\frac{T_w - T_0}{Q} - \frac{1}{A \, \alpha} \right) A \, \lambda \, ,$$

$$\delta = \left(\frac{75 - 20}{438,8} - \frac{1}{1,508 \cdot 15} \right) \cdot 1,508 \cdot 0,1 = 0,0122 \, \mathrm{m} \, .$$

Odpowiedź: podane warunki będą spełnione dzięki izolacji o grubości $12,2$ mm.

Rozwiązanie zadania z optymalizacji

Zadanie to można sprowadzić do zagadnienia programowania liniowego jeżeli przyjąć, że każdy z zakładów składa się z dwu oddziałów, z których pierwszy Z_i^1 produkuje w ramach podanych limitów za niższą cenę, a w razie konieczności (wyczerpania limitu) produkcję rozpoczyna drugi oddział Z_i^2. Przy takich założeniach zadanie rozwiązuje się „standardowo” tzn. tworzy się tabelę ujmującą łącznie koszty transportu i produkcji:

Tablica 1

	H_1	H_2	H_3
Z_1^1	33	35	32
Z_1^2	36	38	35
Z_2^1	36	37	35
Z_2^2	39	40	38
Z_3^1	35	34	32
Z_3^2	38	37	35

oraz tablicę „roboczą"

Tablica 2

	H_1	H_2	H_3	produkcja maksymalna
Z_1^1	X_{11}^1	X_{12}^1	X_{13}^1	70
Z_1^2	X_{11}^2	X_{12}^2	X_{13}^2	
Z_2^1	X_{21}^1	X_{22}^1	$X_{23}^1 1$	50
Z_2^2	X_{21}^2	X_{22}^2	X_{23}^2	
Z_3^1	X_{31}^1	X_{32}^1	X_{33}^1	80
Z_3^2	X_{31}^2	X_{32}^2	X_{33}^2	
dostawa	100	120	90	

Wartości X_{ij} (czyli ilości podzespołów produkowana w oddziałach zakładów Z_i^j i dostarczane do hurtowni H_k) dobierane będą w ten sposób aby w kolejności wybierać warianty o najniższym koszcie $K\left(F_i^k\ Z_j\right)$ (wykorzystać Tabelę 1) oraz żeby spełnione były nierówności:

$$X_{11}^1 + X_{12}^1 + X_{13}^1 \quad <= \quad 70$$

$$X_{21}^1 + X_{22}^1 + X_{23}^1 \quad <= \quad 50$$

$$X_{31}^1 + X_{32}^1 + X_{33}^1 \quad <= \quad 80$$

i równania:

$$X_{11}^1 + X_{11}^2 + X_{21}^1 + X_{21}^2 + X_{31}^1 + X_{31}^2 \quad = \quad 100$$

$$X_{12}^1 + X_{12}^2 + X_{22}^1 + X_{22}^2 + X_{32}^1 + X_{32}^2 \quad = \quad 120$$

$$X_{13}^1 + X_{13}^2 + X_{23}^1 + X_{23}^2 + X_{33}^1 + X_{33}^2 \quad = \quad 90$$

Funkcja celu wynosi:

$$\text{Koszt} = \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} K\left(Z_i^k\ H_j\right) \cdot X_{ij}^k .$$

Tablica 3a

	H_1	H_2	H_3	produkcja
Z_1^1	$x^{(1)}$	$x^{(1)}$	$70^{(1)}$	≤ 70
Z_1^2	$100^{(4)}$	$x^{(5)}$	$x^{(2)}$	
Z_2^1	$x^{(4)}$	$50^{(5)}$	$x^{(2)}$	≤ 50
Z_2^2	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$	$x^{(2)}$	
Z_3^1	$x^{(3)}$	$60^{(3)}$	$20^{(2)}$	≤ 80
Z_3^2	$x^{(4)}$	$10^{(6)}$	$x^{(2)}$	
dostawa	100	120	90	

W Tabeli 3 zaznaczono kolejne kroki znakiem $^{(i)}$ oraz zaznaczono kolejne wyeliminowane komórki znakiem $x^{(i)}$.

Koszty

$$\text{Koszt} = 32 \cdot 70 + 32 \cdot 20 + 34 \cdot 60 + 36 \cdot 100 + 37 \cdot 50 + 37 \cdot 10 = 10740 \text{ zł.}$$

Druga możliwość
Tablica 3b

	H_1	H_2	H_3	produkcja
Z_1^1	$60^{(3)}$	$x^{(3)}$	$10^{(2)}$	≤ 70
Z_1^2	$40^{(4)}$	$x^{(6)}$	$x^{(2)}$	
Z_2^1	$x^{(4)}$	$50^{(5)}$	$x^{(2)}$	≤ 50
Z_2^2	$x^{(4)}$	$x^{(6)}$	$x^{(2)}$	
Z_3^1	$x^{(1)}$	$x^{(1)}$	$80^{(1)}$	≤ 80
Z_3^2	$x^{(4)}$	$70^{(6)}$	$x^{(2)}$	
dostawa	100	120	90	

Koszty

$$\text{Koszt} = 33 \cdot 60 + 32 \cdot 10 + 36 \cdot 40 + 37 \cdot 50 + 32 \cdot 80 + 37 \cdot 70 = 10740 \text{ zł.}$$

Obie możliwości prowadzą do tych samych minimalnych kosztów 10740 zł.

Rozwiązanie zadania z zastosowania informatyki

Przykład programu (język C)

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#define ws 57.3
double a,b,c,alfa,beta,gama,F,p,Rop,Rwp;
int nr;
int zadanie_nr();
void trzy_boki();
void dwa_boki();
void jeden_bok();
void promienie();
void wydruk();
void exit();

void main()
{
  nr=zadanie_nr();
  switch (nr)
  {
  case 1:
    trzy_boki();
    break;
  case 2:
    dwa_boki();
    break;
  case 3:
    jeden_bok();
    break;
  default:
    {
      printf("Nie istnieje taka mozliwosc\n\n");
      exit(0);
    }
  }
 promienie();
 wydruk();
}
```

```
int zadanie_nr()
{
  printf("Program trojkat\n\n");
  printf("zbior danych zawiera:\n");
  printf("Zadanie 1: trzy boki\n");
  printf("Zadanie 2: dwa boki i kat zawarty\n");
  printf("Zadanie 3: dwa katy i bok zawarty\n");
  printf("Prosze wybrac nr zadania\n");
  scanf("%d",&nr);
return nr;
}

void trzy_boki()
{
  printf("Podaj wartosci a, b, c\n");
  scanf("%lf%lf%lf",&a,&b,&c);
  if((a+b>c)&&(a+c>b)&&(b+c>a))
  {
    p=0.5*(a+b+c);
    F=sqrt(p*(p-a)*(p-b)*(p-c));
    alfa=ws*asin(2*F/b/c);
    beta=ws*asin(2*F/a/c);
    gama=ws*asin(2*F/a/b);
  }
  else
  {
    printf("To nie jest trojkat\n\n");
    exit(0);
  }
}
void dwa_boki()
{
  double rgama;
  printf("Podaj dlugosci bokow a i b\n");
  scanf("%lf%lf",&a,&b);
  printf("Podaj w stopniach kat gama\n");
  scanf("%lf",&gama);
  rgama=gama/ws;
  c=sqrt(a*a+b*b-2*a*b*cos(rgama));
  F=0.5*a*b*sin(rgama);
  alfa=ws*asin(a*sin(rgama)/c);
  beta=ws*asin(b*sin(rgama)/c);
}
```

```
void jeden_bok()
{
  double ralfa,rbeta,rgama;
  printf("Podaj dugosc boku a\n");
  scanf("%lf",&a);
  printf("Podaj w stopniach katy beta i gama\n");
  scanf("%lf%lf",&beta,&gama);
  if (beta+gama>180)
  {
    printf("Suma katow musi byc mniejsza od 180 stopni\n\n");
    exit(0);
  }
  rbeta=beta/ws;
  rgama=gama/ws;
  alfa=180-beta-gama;
  ralfa=alfa/ws;
  b=a*sin(rbeta)/sin(ralfa);
  c=a*sin(rgama)/sin(ralfa);
  F=0.5*a*b*sin(rgama);
}

void promienie()
{
  p=0.5*(a+b+c);
  Rwp=F/p;
  Rop=0.5*c/sin(gama/ws);
}

void wydruk()
{
  printf("\n\nDlugosci bokow \n");
  printf("a=%6.2lf    b=%6.2lf    c=%6.2lf\n",a,b,c );
  printf("Katy trojkata \n");
  printf("alfa=%5.2lf   beta=%5.2lf    gama=%5.2lf \n",alfa,beta,gama);
  printf("Powierzchnia \n");
  printf("F=%5.2lf \n",F);
  printf("Promien kola wpisanego\n");
  printf("Rwp%5.2lf \n",Rwp);
  printf("Promien kola opisanego\n");
  printf("Rop=%5.2lf \n",Rop);
}
```