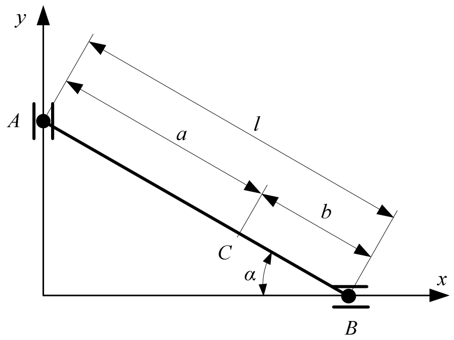
XLIII OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

Zawody III stopnia

Rozwiązania zadań dla grupy mechaniczno-budowlanej

Rozwiązanie zadania 1

ad 1.)



$$x_C = a \cos\alpha\,, \qquad y_C = b \sin\alpha\,,$$

$$x_C^2 = a^2 \cos^2\alpha\,, \qquad y_C^2 = b^2 \sin^2\alpha\,,$$

$$\frac{x_C^2}{a^2} = \cos^2\alpha\,, \qquad \frac{y_C^2}{b^2} = \sin^2\alpha\,.$$

Po dodaniu stronami powyższych równań szukana elipsa opisana jest równaniem:

$$\frac{x_C^2}{a^2} + \frac{y_C^2}{b^2} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\,.$$

ad 2.)

Należy wyznaczyć kolejno:

$$x_B = d \sin\omega t \quad , \quad \cos\alpha = \frac{x_B}{l} = \frac{d}{l}\sin\omega t \quad , \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - x_B^2}}{l} = \frac{\sqrt{l^2 - d^2 \sin^2\omega t}}{l}\,.$$

Położenie punktu C w funkcji czasu opisane jest zatem zależnościami:

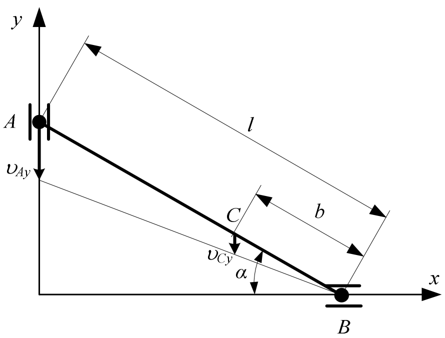
$$x_C = a \cos\alpha = \frac{a\,d}{l}\sin\omega t \quad , \quad y_C = b \sin\alpha = \frac{b}{l}\sqrt{l^2 - d^2 \sin^2\omega t}\,.$$

Patronem honorowym OWT jest Minister Gospodarki.
Organizatorem OWT jest Federacja Stowarzyszeń Naukowo-Technicznych NOT.
Olimpiada jest finansowana ze środków MEN.

Prędkość punktu B, jako prędkość w ruchu harmonicznym jest równa:

$$v_B = v_{Bx} = d\,\omega\,\cos\,\omega\,t\,.$$

Składowa v_x prędkości punktu C wynika z proporcji (Rys.3)



$$\frac{v_{Bx}}{l} = \frac{v_{Cx}}{a} \qquad \Rightarrow \qquad v_{Cx} = \frac{a}{l}\,v_{Bx} = \frac{a}{l}\,d\,\omega\,\cos\,\omega\,t\,.$$

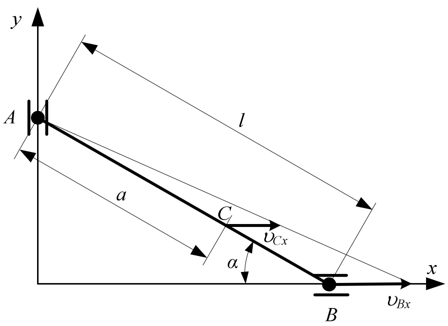
Prędkość punktu A: $v_A = v_{Ay}$ wyznacza się korzystając z faktu, że rzuty prędkości wszystkich punktów prostej sztywnej na tę prostą są sobie równe:

$$v_{Bx}\,cos\,\alpha = -v_{Ay}\,\sin\,\alpha$$

Stąd:

$$v_{Ay} = -v_{Bx}\,\frac{\cos\,\alpha}{\sin\,\alpha} = -d\,\omega\,\cos\,\omega\,t\,\frac{d\,\sin\,\omega t}{\sqrt{l^2 - d^2\,\sin^2\,\omega\,t}}\,.$$

Składowa v_y prędkości punktu C wynika z proporcji (Rys.4)



$$\frac{v_{Ay}}{l} = \frac{v_{Cy}}{b}$$

$$v_{Cy} = \frac{b}{l}\,v_{Ay} = -\frac{b}{l}\,d\,\omega\,\cos\,\omega\,t\,\frac{d\,\sin\,\omega t}{\sqrt{l^2 - d^2\,\sin^2\,\omega\,t}}\,.$$

Ostatecznie jest zatem:

$$\begin{aligned} v_C &= \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = \frac{d}{l}\,\omega\,\cos\,\omega\,t\,\sqrt{a^2 + \frac{b^2\,d^2\,\sin^2\,\omega\,t}{l^2 - d^2\,\sin^2\,\omega\,t}} = \\ &= \frac{d\,a}{l}\,\omega\,\cos\,\omega\,t\,\sqrt{1 + \frac{b^2\,d^2}{a^2}\,\frac{\sin^2\,\omega\,t}{l^2 - d^2\,\sin^2\,\omega\,t}}\,. \end{aligned}$$

Kąt jaki tworzy prędkość v_C z osią x można wyznaczyć z zależności:

$$\cos\,\beta = \frac{v_{Cx}}{v_C} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{b^2\,d^2}{a^2}\,\dfrac{\sin^2\,\omega\,t}{l^2 - d^2\,\sin^2\,\omega\,t}}} \,.$$

ad 3.)

$$\begin{aligned}
v_A &= -d^2\,\omega\,\cos\,\omega\,t\,\frac{\sin\,\omega t}{\sqrt{l^2 - d^2\,\sin^2\,\omega\,t}} = \\
&= -0,95^2 \cdot \pi \cdot \cos\,(0,25 \cdot \pi) \cdot \frac{\sin(0,25 \cdot \pi)}{\sqrt{1^2 - 0,95^2 \cdot \sin^2(0,25 \cdot \pi)}} = -1,91\ \mathrm{m/s}\,, \\
v_B &= d\,\omega\,\cos\,\omega\,t = 0,95 \cdot \pi \cdot \cos(0,25 \cdot \pi) = 2,11\ \mathrm{m/s}\,, \\
v_C &= \frac{d\,a}{l}\,\omega\,\cos\,\omega\,t\,\sqrt{1 + \frac{b^2\,d^2}{a^2}\,\frac{\sin^2\,\omega\,t}{l^2 - d^2\,\sin^2\,\omega\,t}} = \\
&= \frac{0,95 \cdot 0,6}{1} \cdot \pi \cdot \cos(0,25 \cdot \pi) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{0,4 \cdot 0,95}{0,6}\right)^2 \cdot \frac{\sin^2(0,25 \cdot \pi)}{1^2 - 0,95^2 \cdot \sin^2(0,25 \cdot \pi)}} = \\
&= 1,48\ \mathrm{m/s}\,.
\end{aligned}$$

Rozwiązanie zadania 2

Opór cieplny ściany zewnętrznej

$$R_z = \frac{1}{h_w} + \frac{2\,g_t}{\lambda_t} + \frac{g_b}{\lambda_b} + \frac{g_s}{\lambda_s} + \frac{1}{h_z} = \frac{1}{8} + \frac{2 \cdot 0,015}{0,82} + \frac{0,25}{1,7} + \frac{0,1}{0,042} + \frac{1}{25} = 2,73\ \mathrm{m^2\,K/W}\,. \quad (1)$$

Opór cieplny ściany działowej

$$R_d = \frac{1}{h_w} + \frac{2\,g_t}{\lambda_t} + \frac{g_c}{\lambda_c} + \frac{1}{h_w} = \frac{1}{8} + \frac{2 \cdot 0,015}{0,82} + \frac{0,24}{0,62} + \frac{1}{8} = 0,67\ \mathrm{m^2K/W}\,. \quad (2)$$

Bilans cieplny większego pomieszczenia

$$
\begin{aligned}
Q &= \left(\frac{F_{p1}}{R_{st}} + \frac{\left(F_{z1} - 2\,F_{ok} - F_{drz}\right)}{R_z} + 2\,F_{ok}\,k_{ok} + F_{drz}\,k_{drz-z} \right) \left(T_{w1} - T_z\right) + \\
&+ \left(\frac{\left(F_d - F_{drz}\right)}{R_d} + F_{drz}\,k_{drz-w} \right) \left(T_{w1} - T_{w2}\right) \,. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Bilans cieplny mniejszego pomieszczenia

$$
\left(\frac{\left(F_d - F_{drz}\right)}{R_d} + F_{drz}\,k_{drz-w} \right) \left(T_{w1} - T_{w2}\right) =
$$

$$
\left(\frac{\left(F_c - F_{p1}\right)}{R_{st}} + \frac{F_{z2}}{R_z} \right) \left(T_{w2} - T_z\right) \,. \qquad (4)
$$

Obliczenie współczynników stojących przy różnicach temperatur w równaniu (3) i (4)

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{F_{p1}}{R_{st}} + \frac{\left(F_{z1} - 2\,F_{ok} - F_{drz}\right)}{R_z} + 2\,F_{ok}\,k_{ok} + F_{drz}\,k_{drz-z} = \\
&= \frac{24}{5} + \frac{48 - 2 \cdot 1,7 - 1,8}{2,73} + 2 \cdot 1,7 \cdot 1,6 + 1,8 \cdot 1,5 = 28,96 \text{ W/K}\,, \\
B &= \left(\frac{\left(F_d - F_{drz}\right)}{R_d} + F_{drz}\,k_{drz-w} \right) = \frac{12 - 1,8}{0,67} + 1,8 \cdot 2,6 = 19,9 \text{ W/K}\,, \\
C &= \left(\frac{\left(F_c - F_{p1}\right)}{R_{st}} + \frac{F_{z2}}{R_z} \right) = \frac{40 - 24}{5} + \frac{36}{2,73} = 16,39 \text{ W/K}\,.
\end{aligned}
$$

Równania (3) i (4) w uproszczonym zapisie:

$$
(A + B)\,T_{w1} - B\,T_{w2} = Q + A\,T_z\,, \qquad (5)
$$

$$B\,T_{w1} - (B+C)\,T_{w2} = -C\,T_z\,. \tag{6}$$

Wyznaczając T_{w2} z równania (6):

$$T_{w2} = \frac{B\,T_{w1} + C\,T_z}{B+C}\,, \tag{7}$$

podstawiając do równania (5) jest:

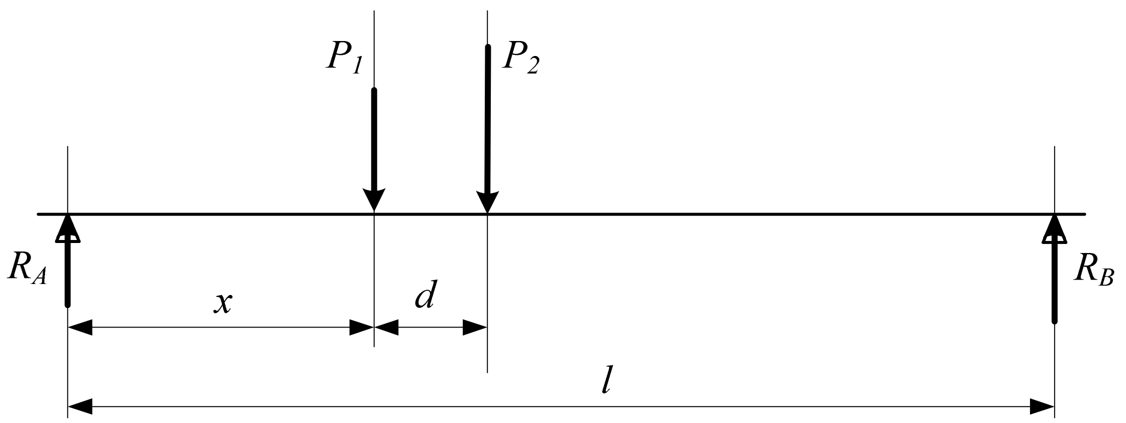
$$T_{w1} = \frac{Q + \left(A + \dfrac{B\,C}{B+C}\right) T_z}{A + B - \dfrac{B^2}{B+C}} = \frac{1300 + \left(28,96 + \dfrac{19,9 \cdot 16,39}{19,9 + 16,39}\right) \cdot (-15)}{28,96 + 19,9 - \dfrac{19,9^2}{19,9 + 16,39}} = 19,3°\mathrm{C}\,, \tag{8}$$

Temperaturę T_{w2} można obliczyć z zależności (7):

$$T_{w2} = \frac{B\,T_{w1} + C\,T_z}{B+C} = \frac{19,9 \cdot 19,3 + 16,39 \cdot (-15)}{19,9 + 16,39} = 3,8°\mathrm{C}\,. \tag{9}$$

Odpowiedź: $T_{w1} = 19,3°\mathrm{C}$, $T_{w2} = 3,8°\mathrm{C}$.

Rozwiązanie zadania 3



Rys.2.

W celu wyznaczenia reakcji R_A na podstawie rys.2 należy zapisać warunek równowagi przęsła belkowego względem podpory B.

$$R_A\, l - P_1\,(l-x) - P_2\,(l-x-d) = 0\,, \tag{1}$$

Z tego równania:

$$R_A = P_1\,\frac{l-x}{l} + P_2\,\frac{l-x-d}{l}\,. \tag{2}$$

Momenty zginające w miejscu działania sił P_1 i P_2 można wyznaczyć za pomocą równań:

$$M_1 = R_A\, x = \frac{x}{l}\,\left[\left(P_1 + P_2\right)\,(l-x) - P_2\, d\right]\,, \tag{3}$$

$$M_2 = R_A\,(x+d) - P_1\, d = \frac{x+d}{l}\,\left[\left(P_1 + P_2\right)\,(l-x) - P_2\, d\right] - P_1\, d\,. \tag{4}$$

Położenie siły P_1, oznaczone $x_{1\,\max}$, w którym moment zginający M_1 osiągnie maksymalną wartość $M_{1\,\max}$ można wyznaczyć z warunku:

$$\frac{dM_1}{dx} = 0\,. \tag{5}$$

Przedstawiając wyrażenie (5) w nieco innej postaci, dogodniejszej do różniczkowania,

$$M_1 = x\,P_1 - \frac{x^2\,P_1}{l} + P_2\,x - \frac{x^2\,P_2}{l} - x\,P_2\,\frac{d}{l}\,, \tag{6}$$

różniczkując je względem x i przyrównując pochodną zgodnie z (5) do 0, oblicza się wartość $x = x_{1\,\max}$

$$\frac{dM_1}{dx} = P_1 - \frac{2\,x}{l}\,P_1 + P_2 - \frac{2\,x}{l}\,P_2 - P_2\,\frac{d}{l} = 0\,, \tag{7}$$

$$x = x_{1\,\max} = \frac{l}{2} - \frac{P_2}{P_1 + P_2}\,\frac{d}{2}\,. \tag{8}$$

Postępując analogicznie w odniesieniu do położenia siły P_2, odpowiadającego takiemu jej położeniu, które wywołuje w przęśle belkowym maksymalny moment $M_{2\,\max}$, otrzymuje się po zróżniczkowaniu względem x wyrażenia (4) i przyrównaniu pochodniej do 0 następującą zależność:

$$x = \frac{l-d}{2} - \frac{P_2}{P_1 + P_2} \frac{d}{2}\,, \tag{9}$$

$$x_{2\,\max} = x + d\,. \tag{10}$$

Wstawiając do (8) i (10) dane liczbowe podane w treści zadania, można obliczyć wartości $x_{1\,\max}$ i $x_{2\,\max}$

$$x_{1\,\max} = \frac{20,00}{2} - \frac{2,00}{1,50 + 2,00} \cdot \frac{3,0}{2} = 9,14 \text{ m}\,,$$

$$x_{2\,\max} = 3,00 + \frac{20,00 - 3,00}{2} - \frac{2,00}{1,50 + 2,00} \cdot \frac{3,0}{2} = 10,64 \text{ m}\,.$$

Odpowiedź: Położenie osi o naciskach P_1 i P_2, w których wystąpią maksymalne wartości momentów zginających są równe odpowiednio $x_{1\,\max} = 9,14$ m, $x_{2\,\max} = 10,64$ m.