# XLIII OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

## Zawody II stopnia

### Rozwiązania zadań dla grupy mechaniczno-budowlanej

### Rozwiązanie zadania 1

Przy dopuszczalnej temperaturze powierzchni zewnętrznej komory spalania (izolacji) $t_p$ gęstość strumienia ciepła do otoczenia wynosi:

$$q = \alpha \left(t_p - t_{ot}\right) + \sigma \left(\left(t_p + 273\right)^4 - \left(t_{ot} + 273\right)^4\right) , \tag{1}$$

$$q = 10 \cdot (40 - 25) + 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot \left((40 + 273)^4 - (25 + 273)^4\right) = 247,06 \text{ W/m}^2 . \tag{2}$$

Ten strumień jest przewodzony (szeregowo) przez obie warstwy izolacji. Z wyrażenia na gęstość strumienia ciepła przewodzonego przez ścianę płaską można policzyć jej grubość.

Pierwsza warstwa izolacji:

$$\delta_1 = \frac{\lambda_1 \left(t_0 - t_{dop}\right)}{q} , \tag{3}$$

$$\delta_1 = \frac{0,5 \cdot (700 - 250)}{247,06} = 0,911 \text{ m}. \tag{4}$$

Druga warstwa izolacji:

$$\delta_2 = \frac{\lambda_2 \left(t_{dop} - t_p\right)}{q} , \tag{5}$$

$$\delta_2 = \frac{0,05 \cdot (250 - 40)}{247,06} = 0,0425 \text{ m}. \tag{6}$$

---

Patronem honorowym OWT jest Minister Gospodarki.
Organizatorem OWT jest Federacja Stowarzyszeń Naukowo-Technicznych NOT.
Olimpiada jest finansowana ze środków MEN.

Strumień ciepła traconego do otoczenia z niezaizolowanej ściany:

$$q_0 = \alpha \left(t_0 - t_{ot}\right) + \sigma \left(\left(t_0 + 273\right)^4 - \left(t_{ot} + 273\right)^4\right) , \tag{7}$$

$$q_0 = 10 \cdot (700 - 25) + 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot \left((700 + 273)^4 - (25 + 273)^4\right) = 57\,123\ \mathrm{W/m^2} . \tag{8}$$

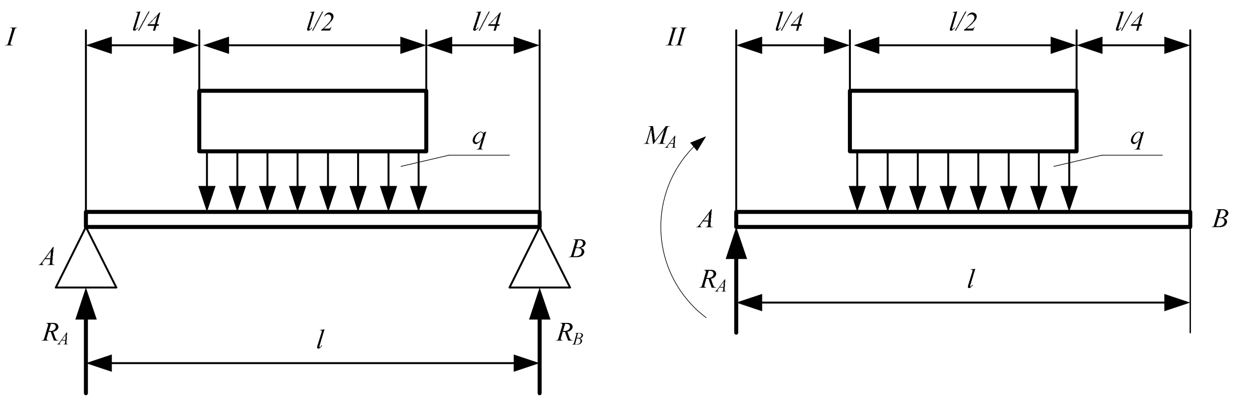
Stopień redukcji strumienia ciepła:

$$\frac{q}{q_0} = \frac{247,06}{57123} = 0,00433 = 0,433\ \% . \tag{9}$$

Odpowiedź: Pierwsza warstwa izolacji ma grubość $0,911$ m, druga $0,0425$ m, stopień redukcji stumienia ciepła $0,433$ %.

**Rozwiązanie zadania 2**

Na postawie rysunku zamieszczonego w treści zadania, można zbudować schematy obliczeniowe zadania, pokazane na rys.1.




Rys.1. Schematy obliczeniowe belek

W pierwszej kolejności należy wyznaczyć wartości obciążenia równomiernie rozłożonego $q$, działającego na pojedynczą belkę. Zakłada się przy tym, że ze względu na pełną symetrię, betonowy blok działa z takim samym obciążeniem na każdą z dwóch belek. Jest zatem:

$$q = \frac{1}{2} \cdot 2\, d\, a\, \gamma = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,25 \cdot 2,4 = 1,2\ \mathrm{kN/m} . \tag{1}$$

Sytuacja I

Należy wyznaczyć maksymalną wartość momentu zginającego $M_{Imax}$. Wiadomo, że w takim schemacie obciążenia, belki swobodnie podpartej, wartość taka wystąpi w przekroju poprzecznym belki położonym w środku jej rozpiętości. Reakcje na podporach $A$ i $B$ są jednakowe i równe (rys.1):

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}\, q\, \frac{l}{2} = \frac{q\, l}{4} = \frac{1,2 \cdot 3}{4} = 0,9\,\mathrm{kN}. \tag{2}$$

Wobec tego, maksymalna wartość momentu zginającego będzie równa:

$$\begin{aligned} M_{Imax} &= R_A \frac{l}{2} - q\, \frac{l}{4}\, \frac{l}{8} = \\ &= \frac{q\, l}{4}\, \frac{l}{2} - \frac{q\, l^2}{32} = \frac{q\, l^2}{8} - \frac{q\, l^2}{32} = \\ &= \frac{3\, q\, l^2}{32} = \frac{3 \cdot 1,2 \cdot 3^2}{32} = 1,0125\,\mathrm{kNm}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Jeżeli zatem, zgodnie z treścią zadania maksymalne naprężenie $\sigma$ od zginania belki nie może przekroczyć granicznej wartości $k$, to przekrój scharakteryzowany jego wskaźnikiem wytrzymałości $W_I$ powinien być równy (w prosty sposób należy przekształcić znany wzór na naprężenie normalne przy zginaniu belek):

$$W_I = \frac{M_{Imax}}{k} = \frac{1,0125}{k}\,\mathrm{m}^3\,. \tag{4}$$

Sytuacja II

Należy wyznaczyć maksymalną wartość momentu zginającego $M_{IImax}$. Wiadomo, że w takim schemacie obciążenia, belki jednostronnie sztywno utwierdzonej, wartość taka wystąpiw przekroju utwierdzenia, czyli punkcie $A$ (rys.1):

$$M_A = M_{IImax} = q\, \frac{l}{2} \left( \frac{l}{4} + \frac{l}{4} \right) = \frac{q\, l^2}{4} = \frac{1,2 \cdot 3,0^2}{4} = 2,7\,\mathrm{kNm}\,. \tag{5}$$

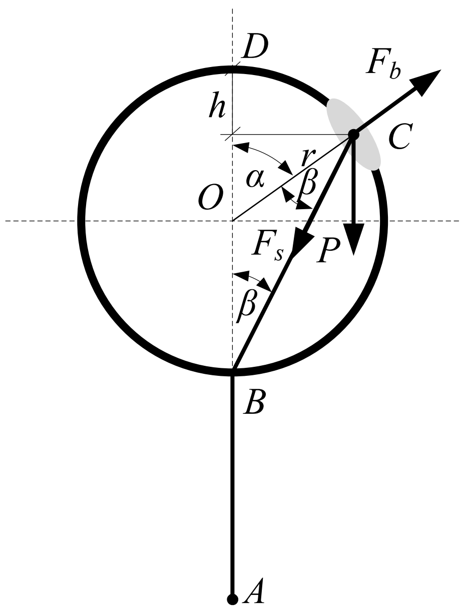
Analogicznie do (4) mamy:

$$W_{II} = \frac{M_{IImax}}{k} = \frac{2,7}{k}\,\mathrm{m}^3\,. \tag{6}$$

$$\frac{W_{II}}{W_I} = \frac{2,7}{1,0125} = 2,67\ . \tag{7}$$

Odpowiedź: Naprężenie od zginania nie przekroczy wartości $k$, w belce wspornikowej (sytuacja II), kiedy wskaźnik wytrzymałości jej przekroju poprzecznego $W_{IImax}$ będzie 2,67 razy większy od wskaźnika $W_{Imax}$ belki swobodnie podpartej.

**Rozwiązanie zadania 3**




Rys.1. Rozkład sił działających na kamień

Na rys.1 przedstawiono wszystkie siły działające w układzie.

1. Siła ciężkości kamienia $P = m\,g$ ,

2. Siła sprężystości nici rozciągniętej o $\Delta\, l = CB$, gdzie $CB = 2\,r\,\cos\beta$, a ponieważ $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$, więc $CB = 2\,r\,\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

$$F_s = k\,CB = 2\,k\,r\,\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ . \tag{1}$$

3. Siła bezwładności

$$F_b = \frac{m\,v^2}{2}\,. \tag{2}$$

Siłę tę można wyznaczyć wykorzystując zasadę zachowania energii mechanicznej w punktach $C$ i $D$ względem poziomej płaszczyzny przechodzącej przez punkt $C$. Z rys.1 wynika, że energia w punkcie $D$ jest równa:

$$E_D = m\,g\,h + \frac{k\,DB^2}{2} = m\,g\,r\,(1 - \cos\,\alpha) + 2\,k\,r^2\,, \tag{3}$$

gdzie $DB = 2r$. Energię w punkcie $C$ można obliczyć ze wzoru:

$$E_C = \frac{m\,v^2}{2} + \frac{k\,CB^2}{2} = \frac{m\,v^2}{2} + 2\,k\,r^2\,\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,, \tag{4}$$

$E_C = E_D$, zatem

$$\frac{m\,v^2}{2} + 2\,k\,r^2\,\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = m\,g\,r\,(1 - \cos\,\alpha) + 2\,k\,r^2\,. \tag{5}$$

Siła bezwładności ma wartość

$$F_b = \frac{m\,v^2}{2} = -4kr\,\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2mg(1 - \cos\alpha) + 4kr = 2mg(1 - \cos\alpha) + 4kr\,\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,. \tag{6}$$

Warunek równowagi rzutów sił na kierunek $OC$:

$$F_s\,\cos\,\beta + P\,\cos\,\alpha = F_s\,\cos\,\left(\frac{\alpha}{2}\right) + P\,\cos\,\alpha = F_b\,, \tag{7}$$

$$2\,k\,r\,\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + m\,g\,\cos\,\alpha = 2\,m\,g\,(1 - \cos\,\alpha) + 4\,k\,r\,\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,. \tag{8}$$

Po standardowych trygonometrycznych przekształceniach otrzymuje się:

$$2\,k\,r\,\left(3\,\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2\right) = m\,g\,\left(5 - 6\,\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\,. \tag{9}$$

Dla uproszczenia zapisu podstawiając:

$$A = \frac{2\,k\,r}{m\,g} = \frac{2 \cdot 100 \cdot 1}{10 \cdot 9,81} = 2,039$$

jest

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{5+2\,A}{6+3\,A} = \frac{5+2\cdot 2,039}{6+3\cdot 2,039} = 0,7492\ , \tag{10}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0,8656 \quad ; \quad \frac{\alpha}{2} = 30,05^\circ \quad ; \quad \alpha = 60,1^\circ\ . \tag{11}$$

Odpowiedź: Kąt, przy którym suma sił działających od kamienia na obręcz będzie równa zero ma wartość około 60°.

**Rozwiązanie zadania z optymalizacji**

Oznaczenia:

liczba sztuk artykułu w partii – $P$;

roczna liczba partii – $\frac{Z}{P}$;

całkowity, łączny koszt wznawiania produkcji kolejnych partii $F_2 = \frac{Z}{P}\cdot k_2$.

Koszty magazynowania:

W okresie magazynowania jednej partii średnia liczba magazynowanych sztuk wynosi $\frac{P}{2}$.

Czas magazynowania jednej partii w miesiącach wynosi

$$\frac{12}{\frac{Z}{P}} = \frac{12\cdot P}{Z}\ .$$

Łączny koszt magazynowania

$$F_1 = \frac{P}{2}\cdot\frac{12\cdot P}{Z}\cdot\frac{Z}{P}\cdot k_1 = \frac{12\cdot P}{2}\cdot k_1\ .$$

Całkowity koszt produkcji

$$F = F_1 + F_2 + K = \frac{12\cdot P}{2}\cdot k_1 + \frac{Z}{P}\cdot k_2 + K\ . \tag{1}$$

Minimum powyższej funkcji (1) znajdujemy poprzez obliczenie pochodnej względem $P$ i przyrównanie jej do zera:

$$\frac{dF}{dP} = 6\cdot k_1 - \frac{Z}{P^2}\cdot k_2 = 0\ .$$

$$P = \sqrt{\frac{Z \cdot k_2}{6 \cdot k_1}} = \sqrt{\frac{60000 \cdot 1800}{6 \cdot 2}} = 3000 \text{ szt.}$$

Odpowiedź: 3000 sztuk w jednej partii zapewniają najniższy łączny koszt produkcji i magazynowania rozpatrywanego artykułu.

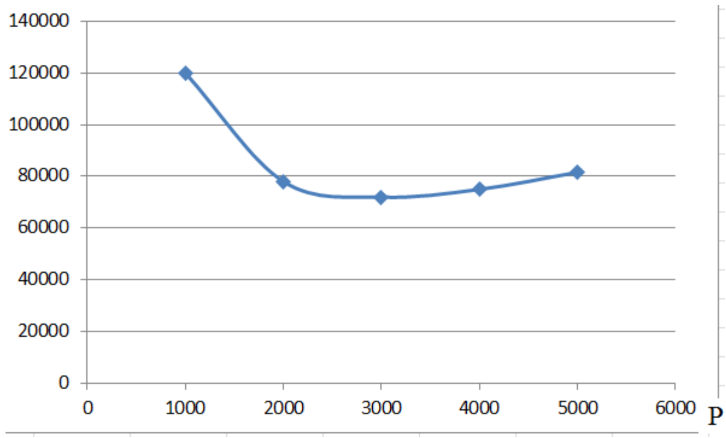
Metoda wykreślna

Wykorzystując część równania (1) wykonujemy jego wykres

$$F' = \frac{12 \cdot P}{2} \cdot k_1 + \frac{Z}{P} \cdot k_2 \,,$$

$$F' = 12 \cdot P + \frac{108 \cdot 10^6}{P} \,.$$

| P | F' |
|---|---|
| 1000 | 120000 |
| 2000 | 78000 |
| 3000 | 72000 |
| 4000 | 75000 |
| 5000 | 81600 |




Funkcja osiąga minimum dla $P = 3000$ szt.

**Rozwiązanie zadania z zastosowania informatyki**

**Przykładowy program w języku FORTRAN dla $R = 10$ i $N = 10$**

```
      Program olimp
      Real,Dimension(10)::X,Y
      Real,Dimension(10,10)::OD
      R=100
      call srand(2.6)
      do i=1,10
         Fi=rand(0.0)* 6.28
         X(i)=R*cos(Fi)
         Y(i)=R*sin(Fi)
      end do
      odmax=0
      do i=1,9
         do j=i+1,10
            OD(i,j)=sqrt((X(i)-X(j))**2+(Y(i)-Y(j))**2)
            if (OD(i,j).GT.odmax) then
               odmax=OD(i,j)
               ik=i
               jk=j
            end if
         end do
      end do
   99 Format (1x,10F7.2)
      Write(*,*)
      do i=1,10
         Write(*,99)(OD(i,j),j=1,10)
      end do
      Write(*,*)
      Write(*,*)
      Write(*,*) ik,jk,odmax
      Write(*,*)
      Write(*,*)
      Write(*,*) X(ik),Y(ik)
      Write(*,*) X(jk),Y(jk)
      end
```