XLIV OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

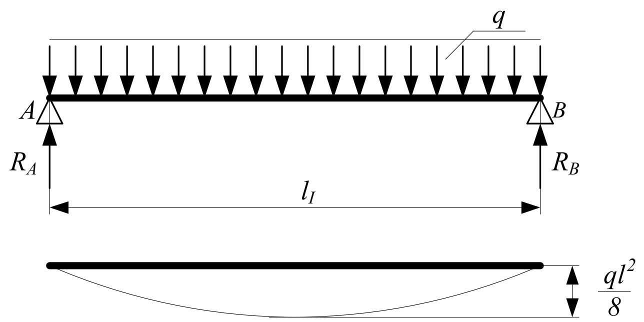
Zawody III stopnia

Rozwiązania zadań dla grupy mechaniczno-budowlanej

Rozwiązanie zadania 1

W pierwszej kolejności należy wyznaczyć reakcję R_A z warunku równowagi względem podpory B (rys.1.):

$$R_A\, l - q\, l\, \frac{l}{2} = 0 \qquad \text{skąd} \qquad R_A = \frac{q\, l}{2}\,. \tag{1}$$



Rys.1. Paraboliczny wykres momentów zginających belkę – wzór (2)

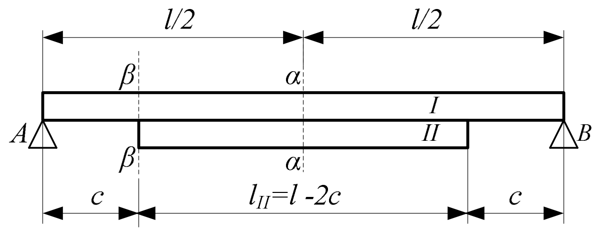
Na podstawie rys.1 można także wyznaczyć równanie opisujące zmienność momentów zginających wzdłuż belki, spowodowanych obciążeniem równomiernie rozłożonym q:

$$M(x) = R_A\, x - q\, x\, \frac{x}{2} = q\, \frac{l}{2}\, x - \frac{q\, x^2}{2} = \frac{q}{2}\left(x\, l - x^2\right)\,. \tag{2}$$

Należy zauważyć, że gdy do zależności (2) podstawi się $x = l/2$, to w środku rozpiętości belki otrzyma się znaną dobrze wartość $M = \dfrac{q\, l^2}{8}$, która jest maksymalną wartością momentu zginającego w tak obciążonej belce swobodnie podpartej. Z (2) wynika także, że zmienność momentów zginających wzdłuż belki następuje według paraboli (rys.1). Można ją z łatwością narysować, przyjmując różne wartości x (np. $x = 0,1\, l$, $x = 0,2\, l$, etc.).

Wartości wskaźników wytrzymałości W w prostokątnych przekrojach $\alpha - \alpha$ i $\beta - \beta$ belki można wyznaczyć przyjmując oznaczenia jak na rys.2.

Organizatorem OWT jest Federacja Stowarzyszeń Naukowo-Technicznych NOT.
Olimpiada jest finansowana ze środków MEN.



Rys.2. Przekroje $\alpha - \alpha$ i $\beta - \beta$ belki

$$W_{\alpha - \alpha} = \frac{b\,(2\,h)^2}{6} = \frac{0,08 \cdot (2 \cdot 0,1)^2}{6} = 0,000533\ \mathrm{m}^3\,. \tag{3}$$

Jest to wartość na całej długości belki dwuwarstwowej (por. rys.2).

$$W_{\beta - \beta} = \frac{b\,h^2}{6} = \frac{0,08 \cdot 0,1^2}{6} = 0,000133\ \mathrm{m}^3\,. \tag{4}$$

Jest to wartość na całej długości obu jednowarstwowych częściach belki (por. rys.2). Naprężenia w przekroju poprzecznym zginanej belki wyraża wzór

$$\sigma = \frac{M}{W}\,. \tag{5}$$

Maksymalną wartość naprężeń w środku rozpiętości belki oblicza się z zależności (2) i (3):

$$\sigma_{max} = \frac{q\,l^2}{8}\,\frac{6}{b\,(2\,h)^2} = \frac{q \cdot 4^2}{8} \cdot \frac{6}{0,08 \cdot (2 \cdot 0,1)^2} = 3750\,q\,. \tag{6}$$

Naprężenia o wartości wyznaczonej z zależności (6) powinny wystąpić w miejscu zmiany belki jednowarstwowej w dwuwarstwową, czyli w odległościach c od obu podpór (por. rys.2). Wartość c, spełniającą ten warunek można wyznaczyć korzystając ze wzorów (2), (4) i (6):

$$\sigma_{max} = 0,5\,q\,\left(c\,l - c^2\right)\,\frac{6}{b\,h^2}\,, \tag{7}$$

$$3750\,q = 0,5\,q \cdot \left(4\,c - c^2\right) \cdot \frac{6}{0,08 \cdot 0,1^2}\,, \tag{8}$$

$$3750 = 15000\,c - 3750\,c^2\,, \tag{9}$$

$$c^2 - 4\,c + 1 = 0\,. \tag{10}$$

Rozwiązanie równania (10) daje wyniki: $c_1 = 0,27$ m i $c_2 = 3,73$ m.

Sens geometryczny ma tylko wartość $c_1 = 0,27$ m.

Zatem:

$$l_{II} = 4,00 - 2 \cdot 0,27 = 3,46\ \mathrm{m}. \tag{11}$$

Odpowiedź: Jeżeli w przekrojach $\alpha - \alpha$ i $\beta - \beta$ wartości naprężeń normalnych σ mają być równe co do wartości to całkowita długość belki II dolnej warstwy powinna być równa 3,46 m.

Rozwiązanie zadania 2

a) Powierzchnia okien:

$$F_{ok} = 2\left(I_{ok} + 1\right) S_{ok}\, H_{ok} = 14 \cdot 0,8 \cdot 1,5 = 16,8\ \mathrm{m}^2\,.$$

Powierzchnia drzwi:

$$F_{dr} = 2\, S_d\, H_d = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16\ \mathrm{m}^2\,.$$

Strumień ciepła przez okna i drzwi

$$Q_{od} = \left(F_{ok}\, U_{ok} + F_{dr}\, U_{dr}\right)\left(t_w - t_z\right) = (16,8 \cdot 1,6 + 16 \cdot 2,6) \cdot (20 - (-20)) = 2739,2\ \mathrm{W}\,.$$

Powierzchnia muru

$$F_m = 2\, H\, (S + B) - F_{ok} - F_{dr} = 2 \cdot 3 \cdot (10 + 30) - 16,8 - 16 = 207,2\ \mathrm{m}^2\,.$$

Opór cieplny muru

$$R_m = \frac{1}{h_w} + \frac{g_b}{\lambda_b} + \frac{g_t}{\lambda_t} + \frac{g_{wm}}{\lambda_{wm}} + \frac{1}{h_z} = \frac{1}{8} + \frac{0,25}{0,675} + \frac{0,03}{0,8} + \frac{1}{25} = 2,95\ \frac{\mathrm{m}^2\,\mathrm{K}}{\mathrm{W}}\,.$$

Strumień ciepła przez mur

$$Q_m = F_m \frac{t_w - t_z}{R_m} = 207,2 \cdot \frac{(20 - (-20))}{2,95} = 2809,5\ \mathrm{W}\,.$$

Strumień ciepła przez przegrody pionowe

$$Q_{pp} = Q_{od} + Q_m = 2739,2 + 2809,5 = 5548,7\ \mathrm{W}\,.$$

Powierzchnia stropu

$$F_{str} = S\, B = 30 \cdot 10 = 300\ \mathrm{m}^2\,.$$

Strumień ciepła przez strop

$$Q_{str} = F_{str}\, U_{str} \left(t_w - t_z\right) = 300 \cdot 0,18 \cdot (20 - (-20)) = 2160 \text{ W} \,.$$

Strumień ciepła do gruntu

$$Q_g = 0,5\, Q_{str} = 0,5 \cdot 2160 = 1080 \text{ W} \,.$$

Całkowity strumień ciepła

$$Q = Q_{pp} + Q_{st} + Q_g = 5548,7 + 2160 + 1080 = 8788,7 \text{ W} \,.$$

Ilość spalonego węgla w piecu

$$m = \frac{Q}{\eta_w\, W_{uw}} = \frac{8788,7}{0,5 \cdot 25 \cdot 10^6} = 7,03 \cdot 10^{-4}\, \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 2,53\, \frac{\text{kg}}{\text{h}} \,.$$

Reakcja spalania węgla

$$\mathrm{C} + \mathrm{O_2} = \mathrm{CO_2} \,.$$

Reakcja ta oznacza, że po spaleniu 1 kmola (tzn. 12 kg) C otrzymuje się 1 kmol CO_2, który w warunkach normalnych zajmuje objętość 22,4 m^3. Stąd ze spalenia 1 kg chemicznie czystego węgla otrzymuje się $\frac{22,4}{12} = 1,87 m^3$ CO_2, a ilość wydzielonego CO_2 w piecu węglowym wyniesie:

$$V_{CO2} = 1,87\, g_1\, m = 1,87 \cdot 0,67 \cdot 2,53 = 3,17\, \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \,.$$

b) Ilość spalonego gazu opałowego w piecu

$$V = \frac{Q}{\eta_w\, W_{ug}} = \frac{8788,7}{0,95 \cdot 32 \cdot 10^6} = 2,89 \cdot 10^{-4}\, \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 1,04\, \frac{\text{m}^3}{h} \,.$$

Reakcje spalania składników gazu opałowego:

$$\mathrm{CH_4} + 2\, \mathrm{O_2} = \mathrm{CO_2} + 2\, \mathrm{H_2\, O} \,,$$

z reakcji – zapisanej dla składników gazowych – wynika, że przy spaleniu 1m^3 metanu otrzymuje się 1 m^3 CO_2.

Podobnie:

$$C_2\,H_6 + O_2 = 2\,CO_2 + 3\,H_2O\,,$$

stąd przy spaleniu 1 m^3 etanu otrzymuje się 2 m^3 CO_2.

Ostatecznie dla paliwa o składzie $r_{CH4} = 0,94$ i $r_{C2H6} = 0,03$ jest:

$$V_{CO2} = V\left(1\,r_{CH4} + 2\,r_{C2H6}\right) = 1,04 \cdot (1 \cdot 0,94 + 2 \cdot 0,03) = 1,04\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}\,.$$

c) Strumień ciepła wypływający przez ścianę przed jej wymianą

Powierzchnia okien

$$F_{ok1} = I_{ok}\,S_{ok}\,H_{ok} = 6 \cdot 0,8 \cdot 1,5 = 7,2\,\mathrm{m}^2\,.$$

Powierzchnia muru

$$F_{m1} = B\,H - F_{ok1} = 30 \cdot 3 - 7,2 = 82,8\,\mathrm{m}^2\,.$$

Strumień ciepła przez jedną długą ścianę (bez drzwi):

$$Q_1 = \left(F_{ok1}\,U_{ok} + \frac{F_{m1}}{R_m}\right)\left(t_w - t_z\right) = \left(7,2 \cdot 1,6 + \frac{82,8}{2,95}\right) \cdot (20 - (-20)) = 1583,5\ \mathrm{W}.$$

Strumień ciepła przez szklaną płytę

$$Q_2 = B\,H\,U_{sp}\left(t_w - t_z\right) = 30 \cdot 3 \cdot 0,9 \cdot (20 - (-20)) = 3240\ \mathrm{W}.$$

Przyrost strumienia ciepła

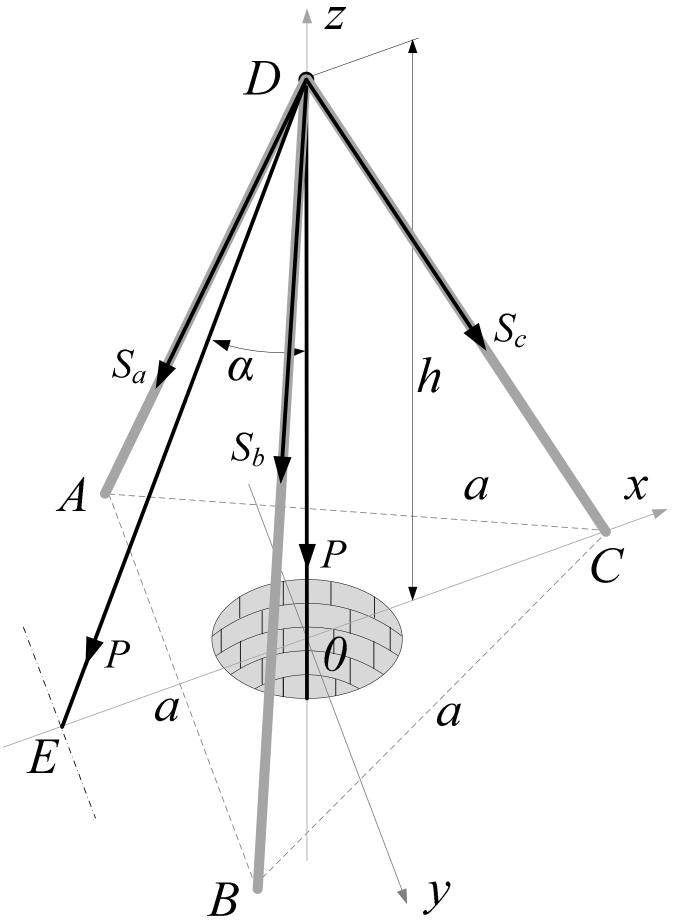
$$\triangle\,Q = Q_2 - Q_1 = 3240 - 1583,5 = 1656,5\ \mathrm{W}.$$

$$\delta = \frac{\triangle\,Q_1}{Q} \cdot 100\% = \frac{1656,5}{8788,7} \cdot 100\% = 18,85\,\%\,.$$

d) Zastąpienie węgla paliwem gazowym istotnie obniża emisję CO_2 do atmosfery. Wprowadzanie szkła modyfikowanego w miejsce muru powoduje znaczny wzrost zapotrzebowania na energię w ogrzewanych pomieszczeniach.

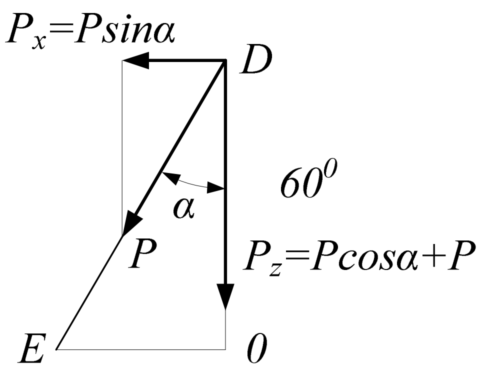
Rozwiązanie zadania 3

Na rys.1 przedstawiono rozkład działających w układzie sił.

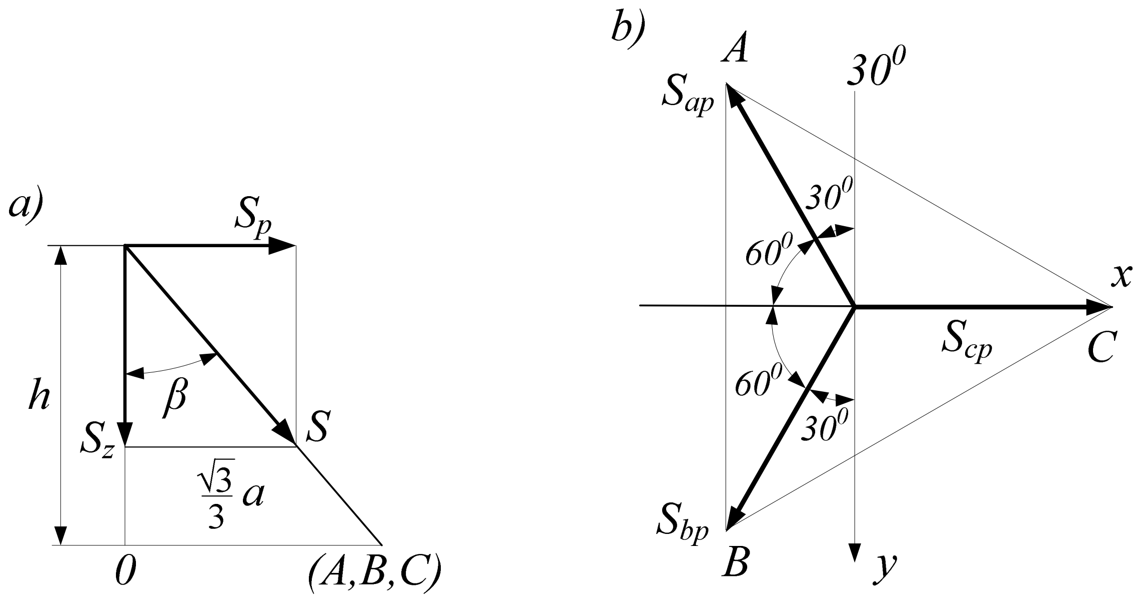


Rys.1. Rozkład sił w trójnogu i linie wyciągającej ciężar ze studni

Na rys.2 przedstawiono składowe sił wywołanych przez nacisk liny na blok D.



Rys.2. Składowe sił wywołanych przez nacisk liny na blok D



Rys.3. Wyznaczenia składowych sił w belkach trójnogu

Sposób wyznaczenia składowych sił w belkach trójnogu ilustruje rys.3. Na rys.3a wyznacza się składowe sił S na płaszczyźnie pionowej.

Składowe poziome S_p:

$$S_p = S \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = S \sin \beta\,, \tag{1}$$

$$\sin \beta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\,a}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}}\,, \tag{2}$$

oraz składowe pionowe S_z:

$$S_z = S \cos \beta\,, \tag{3}$$

$$\cos \beta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}}\,. \tag{4}$$

Wykorzystując rys.3b wyznacza się składowe sił S na płaszczyźnie poziomej xy.

Składowe wzdłuż osi x

$$S_{ax} = S_{ap} \cos \frac{\pi}{3} = S_a \sin \beta \cos \frac{\pi}{3}\,, \tag{5}$$

$$S_{bx} = S_{bp} \cos \frac{\pi}{3} = S_b \sin \beta \cos \frac{\pi}{3}\,, \tag{6}$$

$$S_{cx} = -S_c \sin \beta\,, \tag{7}$$

oraz wzdłuż osi y

$$S_{ay} = -S_{ap} \cos \frac{\pi}{6} = -S_a \sin \beta \cos \frac{\pi}{6}\,, \tag{8}$$

$$S_{by} = S_{bp} \cos \frac{\pi}{6} = S_b \sin \beta \cos \frac{\pi}{6}\,, \tag{9}$$

$$S_{cy} = 0\,, \tag{10}$$

składowe pionowe:

$$S_{az} = S_a \cos \beta\,, \tag{11}$$

$$S_{bz} = S_b \cos \beta\,, \tag{12}$$

$$S_{cz} = S_c \cos \beta\,. \tag{13}$$

Suma rzutów sił na oś x:

$$S_a \sin \beta \cos \frac{\pi}{3} + S_b \sin \beta \cos \frac{\pi}{3} - S_c \sin \beta + P \sin \alpha = 0\,. \tag{14}$$

Suma rzutów sił na oś y:

$$-S_a \sin \beta \cos \frac{\pi}{6} + S_b \sin \beta \cos \frac{\pi}{6} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad S_a = S_b\,. \tag{15}$$

Suma rzutów sił na oś z:

$$S_a \cos \beta + S_b \cos \beta + S_c \cos \beta + P\,(1 + \cos \alpha) = 0\,. \tag{16}$$

Przekształcając równanie (14) i uwzględniając, że $S_a = S_b$ otrzymuje się:

$$2\,S_a \sin \beta \cos \frac{\pi}{3} - S_c \sin \beta + P \sin \alpha = 0\,. \tag{17}$$

Po przekształceniu równania (16) jest:

$$2\,S_a\,\cos\,\beta + S_c\,\cos\,\beta + P\,(1+\cos\,\alpha) = 0\,. \tag{18}$$

Rozwiązując układ równań (17), (18) wyznacza się składowe sił S_a i S_c:

$$S_a = -P\,\frac{\sin\,\alpha\,\cos\,\beta - (1+\cos\,\alpha)\,\sin\,\beta}{2\,\sin\,\beta\,\cos\,\beta\,\left(1+\cos\,\dfrac{\pi}{3}\right)}\,, \tag{19}$$

$$S_c = P\,\frac{\sin\,\alpha\,\cos\,\beta - (1+\cos\,\alpha)\,\sin\,\beta\,\cos\,\dfrac{\pi}{3}}{\sin\,\beta\,\cos\,\beta\,\cos\,\dfrac{\pi}{3} + \sin\,\beta\,\cos\,\beta}\,. \tag{20}$$

Obliczenia:

a)

$$\sin\,\beta = 0,5\,; \qquad \cos\,\beta = 0,866\,,$$

$$\sin\,\alpha = 0,5\,; \qquad \cos\,\alpha = 0,866\,,$$

$S_a = S_b = -10515$ N; $\quad S_c = -515$ N. $\quad$ Wszystkie pręty są ściskane.

b)

Trójnóg przestaje być stabilny, gdy siła $S_c \geq 0$.

Przyrównując w równaniu (20) licznik do 0 otrzymuje się:

$$\sin\,\alpha\,\cos\,\beta - (1+\cos\,\alpha)\,\sin\,\beta\,\cos\,\frac{\pi}{3} = 0\,. \tag{21}$$

Po przekształceniu:

$$\sin\,\alpha\,\frac{\cos\,\beta}{\sin\,\beta\,\cos\,\dfrac{\pi}{3}} - 1 = \cos\,\alpha\,. \tag{22}$$

Podnosząc równanie (22) stronami do kwadratu i podstawiając $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$ otrzymuje się:

$$\sin^2\alpha\,\left(\frac{\cos\,\beta}{\sin\,\beta\,\cos\,\dfrac{\pi}{3}}\right)^2 - 2\,\sin\,\alpha\,\frac{\cos\,\beta}{\sin\,\beta\,\cos\,\dfrac{\pi}{3}} + 1 = 1 - \sin^2\alpha\,, \tag{23}$$

$$\sin^2\alpha\left[\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta\cos\frac{\pi}{3}}\right)^2+1\right]-2\sin\alpha\frac{\cos\beta}{\sin\beta\cos\frac{\pi}{3}}=0\,. \tag{24}$$

Pomijając rozwiązanie $\sin\alpha=0$ niezerowym rozwiązaniem równania (24) jest zależność:

$$\sin\alpha=\frac{2\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta\cos\frac{\pi}{3}}}{1+\left(\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta\cos\frac{\pi}{3}}\right)^2}=0,533\,,\qquad \alpha=0,562\,\mathrm{rad}=32,2^{\circ}\,. \tag{25}$$

Odpowiedź: Trójnóg przewróci się, jeżeli kąt odchylenia od pionu, liny wyciągającej ciężar ze studni będzie większy od $32,2^{\circ}$.