XLIV OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

Zawody II stopnia

Rozwiązania zadań dla grupy mechaniczno-budowlanej

Rozwiązanie zadania 1

Obliczmy najpierw pole przekroju poprzecznego rurowego pręta, A.

$$A = \frac{\pi \left(D^2 - d^2\right)}{4},$$

D – średnica zewnętrzna rury; d – średnica wewnętrzna rury.

$$d = D - 2\,g = 30 - 2 \cdot 2,6 = 24,8\,\mathrm{mm}^2, \tag{1}$$

$$A = \frac{\pi \left(D^2 - d^2\right)}{4} = \frac{\pi \cdot \left(30^2 - 24,8^2\right)}{4} = 223,69\,\mathrm{mm}^2 = 2,24 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2. \tag{2}$$

Moment bezwładności J przekroju poprzecznego rurowego pręta jest równy:

$$J = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{\pi}{64} \cdot \left(30^4 - 24,8^4\right) = 21181,55\,\mathrm{mm}^4 = 2,12 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^4. \tag{3}$$

W każdym poradniku można znaleźć wzór do wyznaczenia wartości poziomej siły osiowej H_t, powstającej w obustronnie utwierdzonym pręcie wskutek zmiany temperatury. Mamy więc:

$$H_t = \alpha_t\,\Delta t\,E\,A = \alpha_t\left(t_l(2) - t_l(1)\right) E\,A. \tag{4}$$

W każdym poradniku można też znaleźć wzór do wyznaczenia osiowej siły krytycznej P_{kr}, powodującej wyboczenie pręta obustronnie utwierdzonego. Mamy zatem:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2\,E\,J}{l_w^2}, \tag{5}$$

Organizatorem OWT jest Federacja Stowarzyszeń Naukowo-Technicznych NOT.
Olimpiada jest finansowana ze środków MEN.

l_w – długość wyboczeniowa pręta; w przypadku pręta obustronnie zamocowanego $l_w = 0,5\, l$.

Aby wskutek wzrostu temperatury nie nastąpiło wyboczenie pręta, siła H_t, powinna być mniejsza od siły P_{kr}.

W celu wyznaczenia temperatury t_2, przyjmijmy jednak warunek graniczny $H_t = P_{kr}$. Wtedy otrzymamy ze wzorów (4) i (5):

$$H_t = 0,000012 \cdot \left(t_2 - 8\right) \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 2,24 \cdot 10^{-4} = 0,000564 \cdot t_2 - 0,004512\,, \qquad (6)$$

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 2,12 \cdot 10^{-8}}{(0,5 \cdot 5,0)^2} = 0,007023\ \mathrm{MN} = 7,023\ \mathrm{kN}. \qquad (7)$$

Z (6) i (7) otrzymujemy:

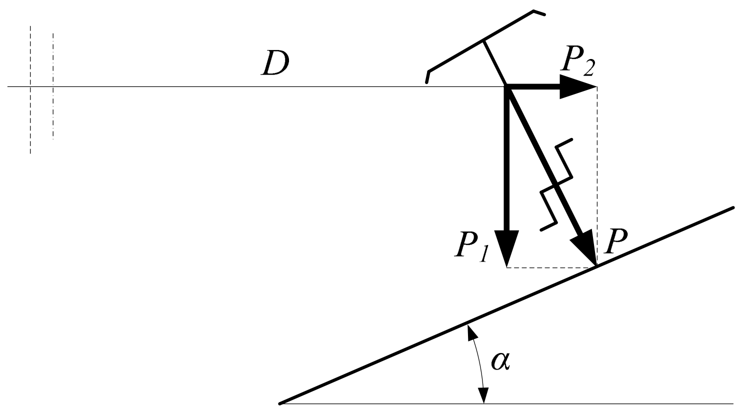
$$0,007023 = 0,000564 \cdot t_2 - 0,00452\,, \qquad (8)$$

$$t_2 = 20,45^{\circ}\mathrm{C} \approx 20,5^{\circ}\mathrm{C}. \qquad (9)$$

Inżynier zatem miał rację. Wystarczy stosunkowo niewielki wzrost temperatury otoczenia (o $20,5^{\circ}\mathrm{C} - 8,0^{\circ}\mathrm{C} = 12,5^{\circ}\mathrm{C}$), aby wzrost siły osiowej, H_t, w rurowym pręcie spowodował jego wyboczenie. Należy więc użyć rury o znacznie większym przekroju poprzecznym.

Rozwiązanie zadania 2

Warunek równowagi sił przedstawia rysunek 1.



Rys.1.

$$P_1 = (M+m)\,g\,, \tag{1}$$

$$P_2 = \frac{2\,(M+m)\,v^2}{D}\,. \tag{2}$$

Warunek równowagi rowerzysty:

$$P_2 = P_1\ \mathrm{tg}\ \alpha\,,$$

stąd i z (1) i (2) – kwadrat prędkości minimalnej wynosi:

$$v^2 = 0,5\ D\,g\ \mathrm{tg}\ \alpha\,. \tag{3}$$

Siła oporów tarcia:

$$T_1 = f\,P = \frac{f\,(M+m)\,g}{\cos\ \alpha}\,. \tag{4}$$

Siła oporu powietrza:

$$T_2 = C_x\,\frac{\rho\,v^2}{2}\,F\,, \tag{5}$$

gdzie ρ – gęstość powietrza

$$\rho = \frac{p}{R\,(t+273)}\,. \tag{6}$$

Ostatecznie całkowity opór

$$T = T_1 + T_2\,,$$

na mocy (3)–(6) wynosi:

$$T = \frac{f\,(M+m)\,g}{\cos\ \alpha} + C_x\,\frac{p}{R\,(t+273)}\,0,25\ D\,g\,F\ \mathrm{tg}\ \alpha\,. \tag{7}$$

Praca wykonana przy pełnym okrążeniu toru:

$$L = \pi\,D\,T\,. \tag{8}$$

Obliczenia liczbowe:

Równanie (7) dla temperatury t_1 (siła T'):

$$T' = \frac{0,005\cdot(75+15)\cdot 9,81}{\cos\ 40} + 0,6\cdot\frac{10^5}{289\cdot(25+273)}\cdot 0,25\cdot 60\cdot 9,81\cdot\cdot 0,6\,\mathrm{tg}\ 40 = 57,38\ \mathrm{N}.$$

Praca (8):

$$L' = 3,14 \cdot 60 \cdot 57,38 = 10815,1 \text{ J} = 10,82 \,\text{kJ}.$$

Równanie (7) dla temperatury t_2 (siła T''):

$$T'' = \frac{0,005 \cdot (75+15) \cdot 9,81}{\cos\, 40} + 0,6 \cdot \frac{10^5}{289 \cdot 273} \cdot 0,25 \cdot 60 \cdot 9,81 \cdot \cdot 0,6 \,\text{tg}\; 40 = 62,10 \text{ N}.$$

Procentowa zmiana pracy jest równa procentowej zmianie całkowitej siły oporu, stąd;

$$\Delta\, T = \frac{T'' - T'}{T'} \cdot 100 = \frac{62,1 - 57,38}{57,38} \cdot 100 = 8,23\% \,.$$

Odpowiedź: Praca w temperaturze 25°C wyniesie 10,82 kJ i wzrośnie o 8,23% przy obniżeniu temperatury do 0°C.

Rozwiązanie zadania 3

Część I:

Energia wirującej masy jest równa

$$E = \frac{1}{2}\, I\, \omega^2 \,,$$

gdzie I jest momentem bezwładności, a ω prędkością kątową; dla wydrążonego walca moment bezwładności jest równy:

$$I = \frac{1}{2}\, m\, \left(r_2^2 + r_1^2\right) \,.$$

Natomiast prędkość kątowa:

$$\omega = 2\, \pi\, n\, \frac{1}{60} \,.$$

Energia odzyskana z koła zamachowego jest równa

$$\Delta\, E = N\, t \,.$$

Jest ona równoważna zmianie energii kinetycznej wirującego walca:

$$\Delta\, E = \frac{1}{2}\, I\, \left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) \,.$$

Prędkość kątowa wirującej masy po odzyskaniu energii jest równa:

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 - \frac{2\,N\,t}{I}}\,.$$

Odpowiednio prędkość obrotowa:

$$n_2 = 60\,\frac{\omega_2}{2\,\pi}\,.$$

Część II:

Pracę wykonaną przez silnik cieplny w czasie t można wyrazić zależnością:

$$E = m_p\,W_u\,\eta_s\,,$$

gdzie η_s jest sprawnością silnika, w tym przypadku jest ona równa:

$$\eta_s = 0,5\,\eta_C = 0,5\,\left(1 - \frac{T_D}{T_G}\right)\,,$$

przy czym temperatury w tym wzorze są podane w kelwinach.

Ostatecznie masa paliwa

$$m_p = \frac{\Delta\,E}{W_u\,0,5\,\left(1 - \frac{T_D}{T_G}\right)} = \frac{N\,t}{W_u\,0,5\,\left(1 - \frac{T_D}{T_G}\right)}\,.$$

Wyniki ilościowe:

Moment bezwładności koła zamachowego:

$$I = \frac{1}{2}\,m\,\left(r_2^2 + r_1^2\right) = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\left(0,12^2 + 0,08^2\right) = 0,052\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\,.$$

Prędkość kątowa:

$$\omega_1 = 2\,\pi\,n\,\frac{1}{60} = 2\cdot 3,14\cdot 64500\cdot\frac{1}{60} = 6754,4\ 1/\mathrm{s}\,.$$

Energia początkowa wirującej masy:

$$E = \frac{1}{2}\, I\, \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,052 \cdot 7654,4^2 = 1186,2 \ \text{kJ} .$$

Energia odzyskana z koła zamachowego:

$$\Delta\, E = N\, t = 60 \cdot 7 = 420\,\text{kJ}.$$

Prędkość kątowa wirującej masy po odzyskaniu energii:

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 - \frac{2\, N\, t}{I}} = \sqrt{6754,4^2 - \frac{2 \cdot 60 \cdot 10^3 \cdot 7}{0,052}} = 5428,5\ 1/\text{s} .$$

Prędkość obrotowa:

$$n_2 = 60\, \frac{\omega_2}{2\, \pi} = 60 \cdot \frac{5428,5}{2 \cdot 3,14} = 51865\,\text{obr/min} .$$

Prędkość obrotowa przy obliczeniach w arkuszu kalkulacyjnym (bez zaokrągleń):

$$n_2 = 51838\,\text{obr/min} .$$

Sprawność silnika Carnota

$$\eta_C = 1 - \frac{T_D}{T_G} = 1 - \frac{200 + 273}{800 + 273} = 0,56 .$$

Sprawność silnika rzeczywistego

$$\eta_s = 0,5\, \eta_C = 0,5 \cdot 0,56 = 0,28 .$$

Ostatecznie masa paliwa

$$m_p = \frac{N\, t}{W_u\, \eta_s} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 7}{42 \cdot 10^6 \cdot 0,28} = 0,0357\,\text{kg} = 35,7\,\text{g}.$$

Masa paliwa na podstawie obliczeń w arkuszu kalkulacyjnym:

$$m_p = 35,8\,\text{g} .$$

Rozwiązanie zadania z optymalizacji

Oznaczając liczbę kursów samochodów odpowiednio przez X_1 i X_2 otrzymujemy pierwszy warunek wynikający z limitu paliwa:

$$6\,X_1 + 9\,X_2 \leq 180\,, \tag{1}$$

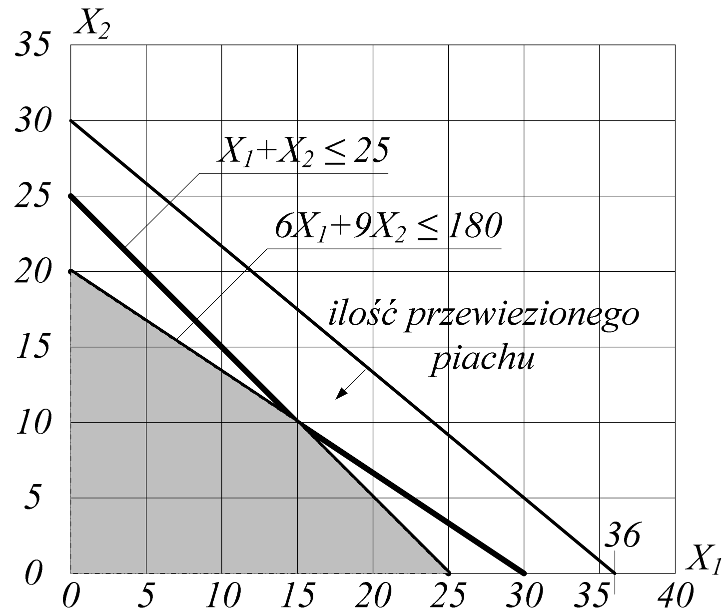
drugi warunek wynika z faktu, że łączna liczba kursów nie może przekroczyć liczby załadowań wykonywanych przez koparkę i że nie zależy od wielkości samochodu:

$$X_1 + X_2 \leq 25 \tag{2}$$

Funkcją celu F ilość przewiezionego piachu:

$$F = 10\,X_1 + 12\,X_2 \tag{3}$$

Nierówności (1) i (2) przedstawione są na wykresie. Dodatkowo pokazana jest relacja między X_1 i X_2 wynikająca z zależności (3) dla wybranej wartości F. Poszukując rozwiązania zagadnienia należy przesuwać linię (3) w kierunku obszaru zaciemnionego zachowując jej nachylenie. Punkt zetknięcia wskazuje optymalne liczby cykli transportowych.



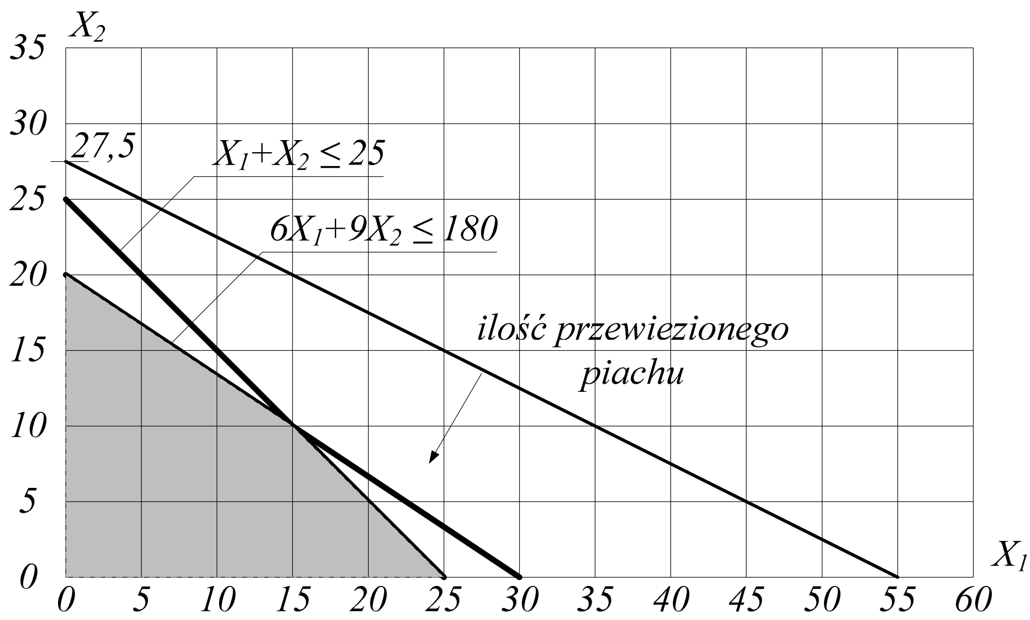
Rys.1

1. Bezpośrednio z wykresu można odczytać, że optymalna sytuacja występuje dla: $X_1 = 15$ kursów i $X_2 = 10$ kursów. Stan ten odpowiada pełnemu wykorzystaniu limitu paliwa oraz przewiezieniu $15 * 10 + 10 * 12 = 270$ ton piachu.

2. Przy braku ograniczenia na paliwo należy wyłącznie wykorzystywać większą ciężarówkę. Przy 25 jej kursach zostanie przewiezione $25 * 12 = 300$ ton piasku.

3. W trzecim przypadku opłaca się wykorzystywać mniejszą ciężarówkę, a liczba kursów wynika z limitu na paliwo i wyniesie $180/6 = 30$, stąd ilość piachu: $30 * 10 = 300$ ton (większa przewiozłaby tylko $180/9 * 12 = 240$ ton).

4. W tym przypadku zmieni się nachylenie przykładowej linii opisującej ilość przewiezionego piachu (Rys.2) i maksymalny przewóz można otrzymać nie wykorzystując mniejszej ciężarówki tj. $X_1 = 0$ natomiast liczba kursów większej $X_2 = 20$, co daje $20*12 = 240$ton.



Rys.2

Rozwiązanie zadania z zastosowania informatyki

Przykładowy program w języku FORTRAN

```
      Program olimp
      Real,Dimension(10)::X,Y,Fi,Pow
      Real,Dimension(10,10)::OD
      R=100
! wylosowanie z wykorzystaniem generatora liczb losowych
! dziesieciu liczb z przedziału 0 - 2pi
      call srand(2.6)
      do i=1,10
         Fi(i)=rand(0.0)*6.28
      end do
! posortowanie wylosowanych liczb w kolejnosci rosnacej
100   k=0
      do i=1,9
      if (Fi(i).GT.Fi(i+1)) then
         F=Fi(i)
         Fi(i)=Fi(i+1)
         Fi(i+1)=F
      k=1
      end if
      end do
      if (k.EQ.1) then
         go to 100
      end if
! wydruk posortownych wielkości
      Write(*,*)
      Write(*,99) (Fi(i),i=1,10)
! obliczenie wspolrzednych 10 punktow na obwodzie
! okregu o promieniu R
      do i=1,10
         X(i)=R*cos(Fi(i))
         Y(i)=R*sin(Fi(i))
      end do
! obliczenie odległosci pomiedzy punktami i znalezienie
! jej maksimum
      odmax=0
      do i=1,9
         do j=i+1,10
            OD(i,j)=sqrt((X(i)-X(j))**2+(Y(i)-Y(j))**2)
            if (OD(i,j).GT.odmax) then
```

```
              odmax=OD(i,j)
              ik=i
              jk=j
           end if
        end do
      end do
! obliczenie powierzchni 10 trojkatow i ich wydruk
      do i=1,9
         Pow(i)=0.5*R**2*sin(Fi(i+1)-Fi(i))
      end do
      Pow(10)=0.5*R**2*sin(6.28-Fi(10)+Fi(1))
      Write(*,*)
      Write(*,99) (Pow(i),i=1,10)
      s=0
99    Format (1x,11F7.1)
! wydruk pełnej tabeli odleglosci, maksymalnej odleglosci,
! wspolrzednych punktow odległych maksymalnie
      Write(*,*)
      do i=1,10.
         Write(*,99)(OD(i,j),j=1,10)
      end do
      Write(*,*)
      Write(*,*) ik,jk,odmax
      Write(*,*)
      Write(*,*) X(ik),Y(ik)
      Write(*,*) X(jk),Y(jk)
      end
```