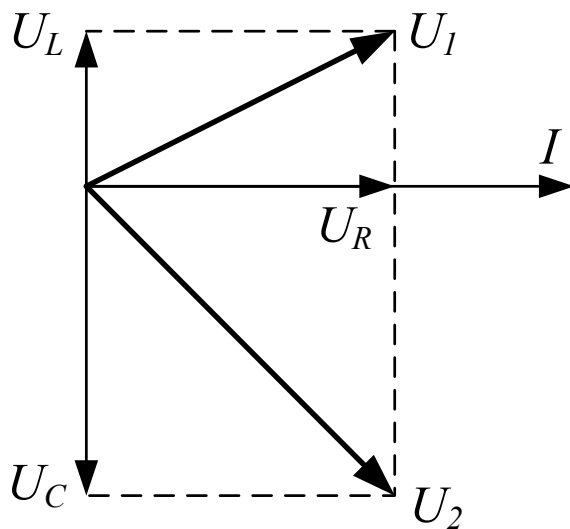


XLIV OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

Zawody II stopnia

Rozwiązania zadań dla grupy elektryczno-elektronicznej

Rozwiązanie zadania 1



Rys.1. Rozkład napięć i prąd w obwodzie RLC

Z wykresu wskazowego obwodu RLC wynika, że

$$U_1 = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}, \quad (1)$$

$$U_2 = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}. \quad (2)$$

Ponieważ napięcia U_1 i U_2 można obliczyć z zależności:

$$U_1 = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = I \sqrt{R^2 + X_L^2}, \quad (3)$$

$$U_2 = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = I \sqrt{R^2 + X_C^2}. \quad (4)$$

to

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\sqrt{U_R^2 + U_L^2}}{\sqrt{U_R^2 + U_C^2}} = \frac{\sqrt{R^2 + X_L^2}}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{2}, \quad (5)$$

gdzie

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,1 = 31,4 \Omega.$$

Organizatorem OWT jest Federacja Stowarzyszeń Naukowo-Technicznych NOT.
Olimpiada jest finansowana ze środków MEN.

Z zależności (5) można zatem obliczyć reaktancję pojemnościową X_C :

$$X_C = \sqrt{3R^2 + 4X_L^2} = \sqrt{3 \cdot 50^2 + 4 \cdot 31,4^2} \approx 106,98 \Omega. \quad (6)$$

Pojemność kondensatora C ma wartość:

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 106,98} \approx 30 \mu\text{F}. \quad (7)$$

Impedancja Z układu jest równa:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2} = \sqrt{50^2 + (106,98 - 31,4)^2} \approx 90,61 \Omega. \quad (8)$$

Przyjmując znamionowe napięcie zasilające $U = 230 \text{ V}$ prąd w układzie jest równy:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{230}{90,61} = 2,54 \text{ A}. \quad (9)$$

Współczynnik mocy $\cos \varphi$ obwodu ma wartość:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{50}{90,61} \approx 0,55, \text{ pojemnościowy}. \quad (10)$$

Napięcia U_1 i U_2 są odpowiednio równe:

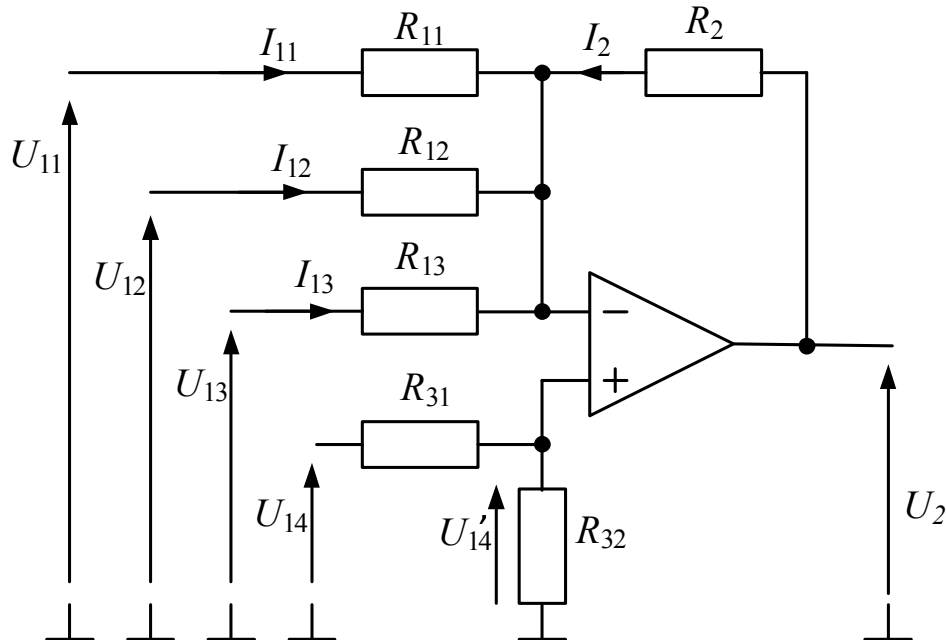
$$U_1 = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = I \sqrt{R^2 + X_L^2} = 2,54 \cdot \sqrt{50^2 + 31,4^2} \approx 150 \text{ V}, \quad (11)$$

$$U_2 = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = I \sqrt{R^2 + X_C^2} = 2,54 \cdot \sqrt{50^2 + 106,98^2} \approx 300 \text{ V}. \quad (12)$$

Odpowiedź: Pojemność zastosowanego w układzie kondensatora ma wartość około $30 \mu\text{F}$. Prąd sieci zasilającej jest równy $2,54 \text{ A}$, a współczynnik mocy $\cos \varphi_C \approx 0,55$. Wskazania woltomierzy: $V_1 \approx 150 \text{ V}$, $V_2 \approx 300 \text{ V}$.

Rozwiązanie zadania 2

Schemat układu realizującego zadaną funkcję napięcia wyjściowego przedstawiono na (rys.1).



Rys.1. Schemat układu realizującego funkcję $U_2 = -U_{11} - 2U_{12} - 3U_{13} + 4U_{14}$

Przyjmując oznaczenia jak na rysunku można napisać następujący układ równań

$$I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_2 = 0, \quad (1)$$

$$I_{11} = \frac{U_{11} - U'_{14}}{R_{11}}, \quad I_{12} = \frac{U_{12} - U'_{14}}{R_{12}}, \quad I_{13} = \frac{U_{13} - U'_{14}}{R_{13}}, \quad I_2 = \frac{U_2 - U'_{14}}{R_2}, \quad (2)$$

$$U'_{14} = \frac{R_{32}}{R_{31} + R_{32}} U_{14}. \quad (3)$$

Po rozwiązaniu układu równań (1), (2), (3) równanie opisujące napięcie wyjściowe wzmacniacza w funkcji sygnałów wejściowych ma postać:

$$U_2 = -\frac{R_2}{R_{11}} U_{11} - \frac{R_2}{R_{12}} U_{12} - \frac{R_2}{R_{13}} U_{13} + \left(\frac{R_2}{R_{11}/R_{12}/R_{13}} + 1 \right) U'_{14}, \quad (4)$$

gdzie $R_{11}/R_{12}/R_{13}$ symbolicznie oznacza wypadkową rezystancję równolegle połączonych rezystorów R_{11} , R_{12} oraz R_{13} .

Ostatecznie napięcie wyjściowe u_2 wzmacniacza operacyjnego jest zatem równe:

$$U_2 = -\frac{R_2}{R_{11}}U_{11} - \frac{R_2}{R_{12}}U_{12} - \frac{R_2}{R_{13}}U_{13} + \left(\frac{\frac{R_2}{1} + 1}{\frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{13}}} \right) \frac{R_{32}}{R_{31} + R_{32}}U_{14}. \quad (5)$$

Z treści zadania wynika, że:

$$\frac{R_2}{R_{11}} = 1, \quad \frac{R_2}{R_{12}} = 2, \quad \frac{R_2}{R_{13}} = 3, \quad (6)$$

$$\left(\frac{\frac{R_2}{1} + 1}{\frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{13}}} \right) \frac{R_{32}}{R_{31} + R_{32}} = 4. \quad (7)$$

Ponieważ rezystory zastosowane w układzie powinny mieć wartości od kilku do kilkadziesiąt kiloomów można założyć, że $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$, $R_{11} = 30 \text{ k}\Omega$, $R_{12} = 15 \text{ k}\Omega$, $R_{13} = 10 \text{ k}\Omega$.

Wypadkowa rezystancja R_1 połączonych równolegle R_{11} , R_{12} oraz R_{13} jest zatem równa:

$$R_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{13}}} = \frac{1}{\frac{1}{30 \cdot 10^3} + \frac{1}{15 \cdot 10^3} + \frac{1}{10 \cdot 10^3}} = 5 \cdot 10^3 \Omega = 5 \text{ k}\Omega. \quad (8)$$

Po podstawieniu wartości R_1 i R_2 do zależności (7) i przekształceniu:

$$\frac{R_{32}}{R_{31} + R_{32}} = \frac{4}{7}. \quad (9)$$

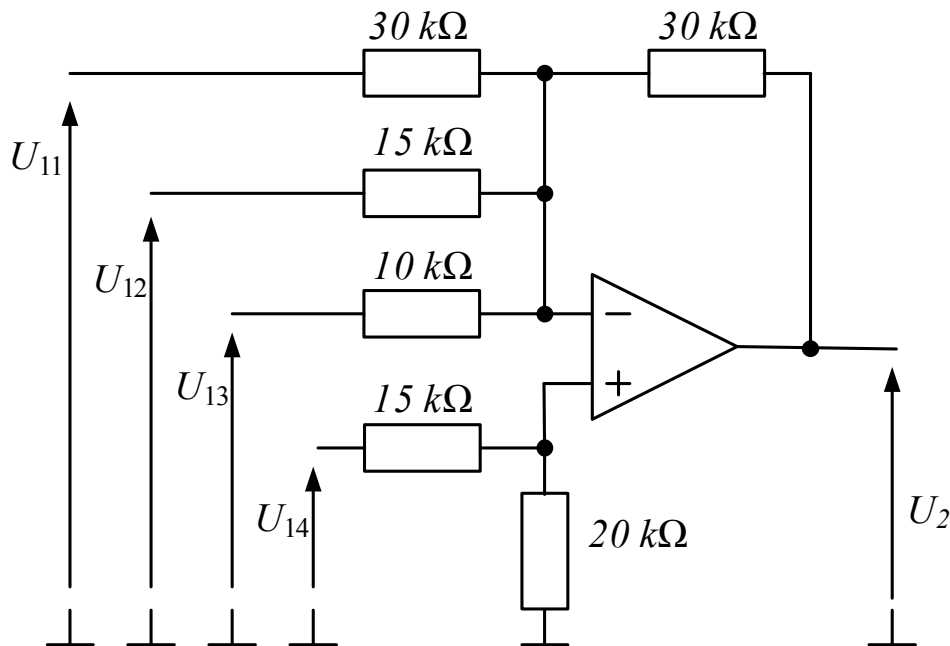
Stąd

$$\frac{R_{31}}{R_{32}} + 1 = \frac{3}{4} + 1. \quad (10)$$

Zatem

$$\frac{R_{31}}{R_{32}} = \frac{3}{4} \quad \text{np. } R_{31} = 15 \text{ k}\Omega, \quad R_{32} = 20 \text{ k}\Omega. \quad (11)$$

Odpowiedź: Schemat układu oraz przykładowe wartości rezystorów są jak na rysunku.



Rozwiązanie zadania 3

Watomierz włączony jak na rysunku mierzy moc bierną odbiornika symetrycznego. Wartość tej mocy oblicza się mnożąc wskazanie przyrządu przez $\sqrt{3}$.

$$Q_{odb} = \sqrt{3} P = \sqrt{3} \cdot 1914 = 3315 \text{ VAR}. \quad (1)$$

Moc pozorna odbiornika

$$S_{odb} = 3 U_f I_f = 3 \cdot 230 \cdot 6 = 4140 \text{ VA}. \quad (2)$$

Moc czynna odbiornika

$$P_{odb} = \sqrt{S_{odb}^2 - Q_{odb}^2} = 2480 \text{ W}. \quad (3)$$

Współczynnik mocy odbiornika

$$\cos \varphi_{odb} = \frac{P_{odb}}{S_{odb}} = \frac{2480}{4140} = 0,6 \quad \longrightarrow \quad \varphi_{odb} = 53,13^\circ . \quad (4)$$

Moc czynna jednej fazy

$$P_f = I_f^2 R_f = \frac{P_{odb}}{3} = \frac{2480}{3} = 827 \text{ W} . \quad (5)$$

Rezystancja jednej fazy odbiornika

$$R_f = \frac{P_f}{I_f^2} = \frac{827}{36} = 23 \Omega . \quad (6)$$

Moc bierna jednej fazy

$$Q_f = I_f^2 X_f = \frac{Q_{odb}}{3} = \frac{3315}{3} = 1105 \text{ VAr} . \quad (7)$$

Reaktancja jednej fazy odbiornika

$$X_f = \frac{Q_f}{I_f^2} = \frac{1105}{36} = 30,69 \Omega . \quad (8)$$

Indukcyjność jednej fazy odbiornika

$$L_f = \frac{X_f}{\omega} = \frac{30,69}{314} = 0,098 \text{ H} = 98 \text{ mH} . \quad (9)$$

Moc bierna baterii kompensacyjnej $\left(\cos \varphi_K = 0,9_L \quad \longrightarrow \quad \varphi_K = 25,84^\circ \right)$

$$\Delta Q = Q_{odb} - Q_K = P_{odb} \left(\text{tg } \varphi_{odb} - \text{tg } \varphi_K \right) = 2480 \cdot (1,33 - 0,48) = 2108 \text{ VAr} . \quad (10)$$

Moc pojedynczej baterii w jednej fazie

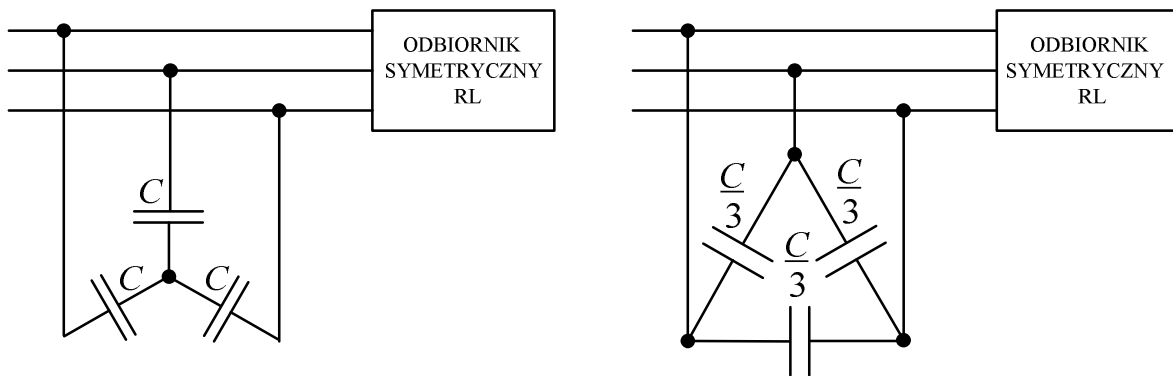
$$Q_C = \frac{\Delta Q}{3} = \left(\frac{U_f}{X_C} \right)^2 \cdot X_C = \frac{U_f^2}{X_C} . \quad (11)$$

Reaktancja baterii

$$X_C = \frac{3U_f^2}{\Delta Q} \quad (12)$$

Pojemność elektryczna baterii w jednej fazie odbiornika

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{\Delta Q}{3U_f^2 \omega} = \frac{2108}{3 \cdot 230^2 \cdot 314} \approx 42 \mu\text{F} \quad (13)$$



Rys.3. Sposób podłączenia baterii kondensatorów kompensacyjnych

Odpowiedź: Moc czynna odbiornika $P_{odb} = 2480 \text{ W}$, moc bierna odbiornika $Q_{odb} = 3315 \text{ VAR}$, moc pozorna odbiornika $S_{odb} = 4140 \text{ VA}$. Parametry jednej fazy odbiornika $R_f = 23 \Omega$, $L_f = 98 \text{ mH}$. Bateria kondensatorów kompensacyjnych w jednej gałęzi kompensatora przy połączeniu w gwiazdę ma pojemność $C = 42 \mu\text{F}$.

Rozwiązanie zadania z optymalizacji

Oznaczając liczbę kursów samochodów odpowiednio przez X_1 i X_2 otrzymujemy pierwszy warunek wynikający z limitu paliwa:

$$6 X_1 + 9 X_2 \leq 180, \quad (1)$$

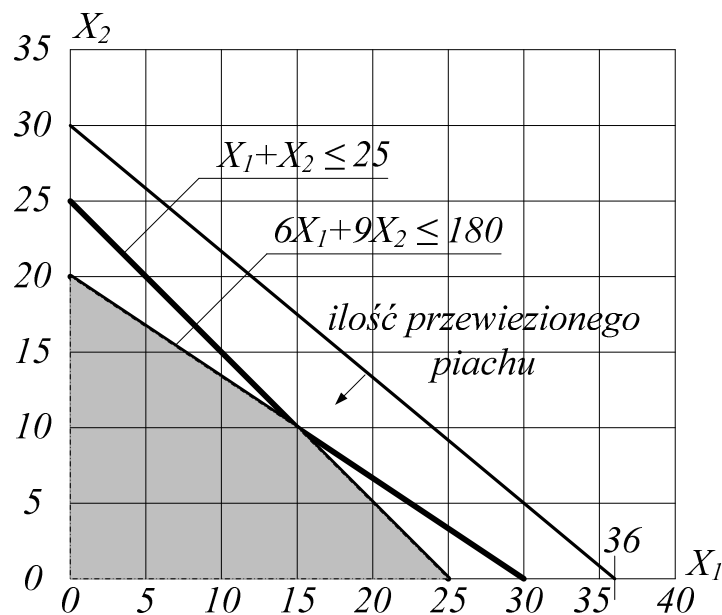
drugi warunek wynika z faktu, że łączna liczba kursów nie może przekroczyć liczby załadowań wykonywanych przez koparkę i że nie zależy od wielkości samochodu:

$$X_1 + X_2 \leq 25 \quad (2)$$

Funkcją celu F ilość przewiezonego piachu:

$$F = 10 X_1 + 12 X_2 \quad (3)$$

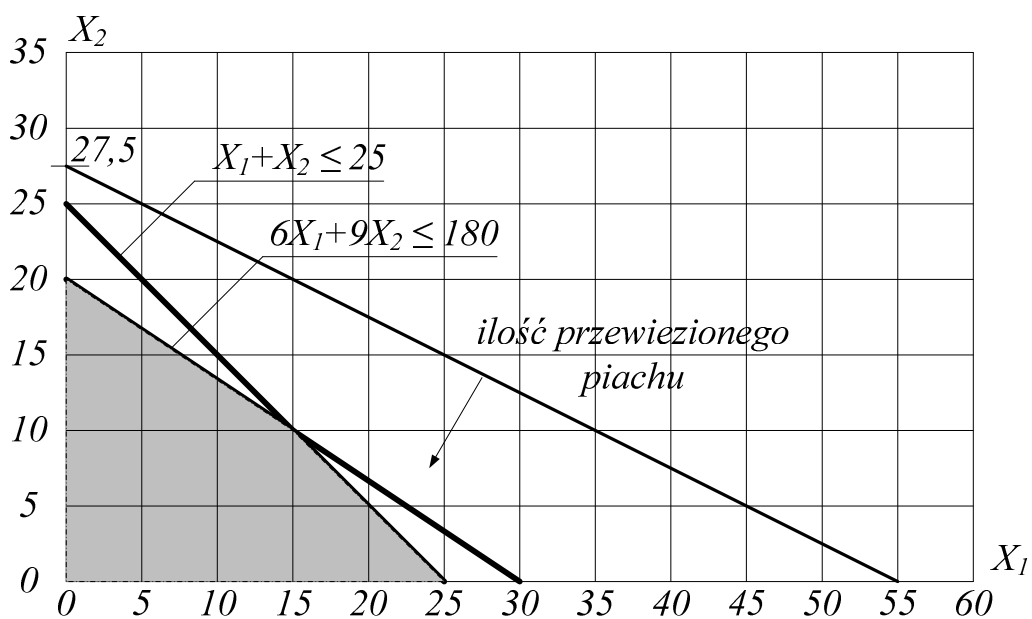
Nierówności (1) i (2) przedstawione są na wykresie. Dodatkowo pokazana jest relacja między X_1 i X_2 wynikająca z zależności (3) dla wybranej wartości F . Poszukując rozwiązania zagadnienia należy przesuwac linię (3) w kierunku obszaru zaciemnionego zachowując jej nachylenie. Punkt zetknięcia wskazuje optymalne liczby cykli transportowych.



Rys.1

1. Bezpośrednio z wykresu można odczytać, że optymalna sytuacja występuje dla: $X_1 = 15$ kursów i $X_2 = 10$ kursów. Stan ten odpowiada pełnemu wykorzystaniu limitu paliwa oraz przewiezieniu $15 * 10 + 10 * 12 = 270$ ton piachu.

2. Przy braku ograniczenia na paliwo należy wyłącznie wykorzystywać większą ciężarówkę. Przy 25 jej kursach zostanie przewiezione $25 * 12 = 300$ ton piasku.
3. W trzecim przypadku opłaca się wykorzystywać mniejszą ciężarówkę, a liczba kursów wynika z limitu na paliwo i wyniesie $180/6 = 30$, stąd ilość piachu: $30 * 10 = 300$ ton (większa przewiozłaby tylko $180/9 * 12 = 240$ ton).
4. W tym przypadku zmieni się nachylenie przykładowej linii opisującej ilość przewiezonego piachu (Rys.2) i maksymalny przewóz można otrzymać nie wykorzystując mniejszej ciężarówki tj. $X_1 = 0$ natomiast liczba kursów większej $X_2 = 20$, co daje $20 * 12 = 240$ ton.



Rys.2

Rozwiązanie zadania z zastosowania informatyki

Przykładowy program w języku FORTRAN

```
Program olimp
Real,Dimension(10)::X,Y,Fi,Pow
Real,Dimension(10,10)::OD
R=100
! wylosowanie z wykorzystaniem generatora liczb losowych
! dziesięciu liczb z przedziału 0 - 2pi
call srand(2.6)
do i=1,10
    Fi(i)=rand(0.0)*6.28
end do
! posortowanie wylosowanych liczb w kolejności rosnącej
100 k=0
do i=1,9
    if (Fi(i).GT.Fi(i+1)) then
        F=Fi(i)
        Fi(i)=Fi(i+1)
        Fi(i+1)=F
    k=1
end if
end do
if (k.EQ.1) then
    go to 100
end if
! wydruk posortowanych wielkości
Write(*,*)
Write(*,99) (Fi(i),i=1,10)
! obliczenie współrzędnych 10 punktów na obwodzie
! okręgu o promieniu R
do i=1,10
    X(i)=R*cos(Fi(i))
    Y(i)=R*sin(Fi(i))
end do
! obliczenie odległości pomiędzy punktami i znalezienie
! jej maksimum
odmax=0
do i=1,9
    do j=i+1,10
        OD(i,j)=sqrt((X(i)-X(j))**2+(Y(i)-Y(j))**2)
        if (OD(i,j).GT.odmax) then
```

```

                odmax=OD(i,j)
                ik=i
                jk=j
            end if
        end do
    end do
! obliczenie powierzchni 10 trojkatow i ich wydruk
    do i=1,9
        Pow(i)=0.5*R**2*sin(Fi(i+1)-Fi(i))
    end do
    Pow(10)=0.5*R**2*sin(6.28-Fi(10)+Fi(1))
    Write(*,*)
    Write(*,99) (Pow(i),i=1,10)
    s=0
99    Format (1x,11F7.1)
! wydruk pełnej tabeli odleglosci, maksymalnej odleglosci,
! wspolrzędnych punktow odległych maksymalnie
    Write(*,*)
    do i=1,10.
        Write(*,99)(OD(i,j),j=1,10)
    end do
    Write(*,*)
    Write(*,*) ik,jk,odmax
    Write(*,*)
    Write(*,*) X(ik),Y(ik)
    Write(*,*) X(jk),Y(jk)
end

```