XLV OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

Zawody III stopnia

Rozwiązania zadań dla grupy mechaniczno-budowlanej

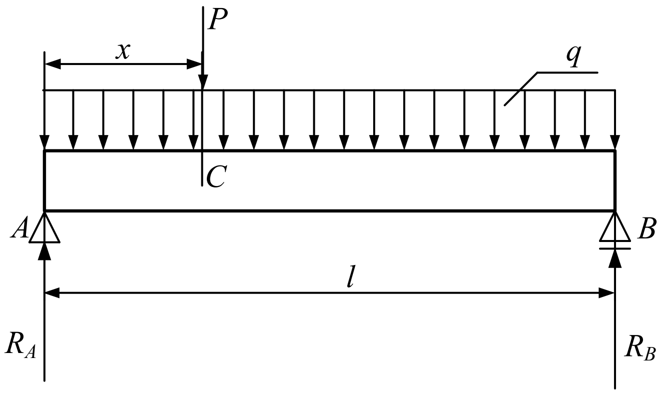
Rozwiązanie zadania 1

Warunek sformułowany w treści zadania można wyrazić za pomocą zależności:

$$\frac{M(x)}{W(x)} = \sigma_{dop} = k = const. \, , \tag{1}$$

w której $M(x)$ jest zmieniającym się wzdłuż belki momentem zginajacym, a $W(x)$ zmieniającym się wzdłuż belki, wskaźnikiem wytrzymałości przekrojów poprzecznych belki.

Postać funkcji $M(x)$ i $W(x)$ można wyznaczyć rozpatrując sytuację pokazaną na rys.1.



Rys.1. Rozkład sił w belce

Równanie równowagi belki względem punktu B ma postać:

$$R_A \, l - \frac{q\, l^2}{2} - P \; (l - x) = 0 \, . \tag{2}$$

Po przekształceniu:

$$R_A = \frac{q\, l}{2} + P \; \left(1 - \frac{x}{l}\right) \, . \tag{3}$$

Organizatorem OWT jest Federacja Stowarzyszeń Naukowo-Technicznych NOT.
Olimpiada jest finansowana ze środków MEN.

Funkcję zmienności $M(x)$ można wyznaczyć układając równanie momentów zginających względem ruchomego punktu C.

$$M\,(x) = R_A\, x - \frac{q\, x^2}{2}\,. \tag{4}$$

Po przekształceniu zależności (3) i (4) jest:

$$M(x) = x\, \left(\frac{q\, l}{2} + P\right) - x^2\, \left(\frac{P}{l} + \frac{q}{2}\right)\,. \tag{5}$$

Wskaźnik wytrzymałości $W(x)$ określa zależność:

$$W(x) = \frac{b\, h^2(x)}{6}\,. \tag{6}$$

Z zależności (1):

$$W(x) = \frac{M(x)}{k}\,. \tag{7}$$

Podstawiając do wzoru (7) zależności (5) i (6) otrzymuje się równanie:

$$\frac{b\, h^2(x)}{6} = \frac{x\, \left(\frac{q\, l}{2} + P\right) - x^2\, \left(\frac{P}{l} + \frac{q}{2}\right)}{k}\,. \tag{8}$$

Z równania (8) otrzymuje się zależność określającą wysokość belki $h(x)$ w funkcji jej długości:

$$h^2\,(x) = \frac{6\, x\, \left[\left(\frac{q\, l}{2} + P\right) - x\, \left(\frac{P}{l} + \frac{q}{2}\right)\right]}{b\, k}\,,$$

$$h(x) = \sqrt{\frac{6\, x\, \left[\left(\frac{q\, l}{2} + P\right) - x\, \left(\frac{P}{l} + \frac{q}{2}\right)\right]}{b\, k}}\,. \tag{9}$$

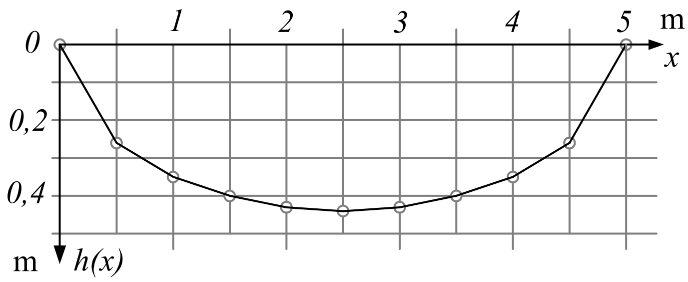
Zależność (9) opisuje tzw. belkę swobodnie podpartą o równomiernej wytrzymałości na zginanie. Analizując tę zależność łatwo zauważyć, że przy $x = 0$ oraz przy $x = l$ wysokość belki $h(0) = h(l) = 0$. Takiej belki nie można praktycznie wykonać. Dlatego warunek równej wytrzymałości belki na zginanie jest warunkiem tylko teoretycznym. W praktyce można różnicować wysokość belki wzdłuż jej długości, ale nad podporami, tj. przy $x = 0$ i przy $x = l$ belka musi mieć określoną, niezerową wysokość.

Przyjmując, że górna krawędź belki jest pozioma kształt dolnej krawędzi można wyznaczyć obliczając wartości funkcji $h(x)$ dla różnych wartości x (tab.1).

Tablica 1

x (m)	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00
h (m)	0,00	0,26	0,35	0,40	0,43	0,44	0,43	0,40	0,35	0,26	0,00

Wykres funkcji $h(x)$ przedstawiono na rys.2.



Rys.2. Teoretyczny kształt dolnej krawędzi belki

Rozwiązanie zadania 2

a) Obliczenia wstępne

Powierzchnia ścian zewnętrznych:

$$F_{z1} = (2\,L + S)\ H - 2\,A_{ok} - A_{dz} = (2 \cdot 8 + 4) \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 3 = 53\,\mathrm{m}^2\,, \tag{1}$$

$$F_{z2} = (2\,L + S)\ H - A_{ok} = (2 \cdot 8 + 4) \cdot 3 - 2 = 58\,\mathrm{m}^2\,. \tag{2}$$

Powierzchnia ściany wewnętrznej:

$$F_w = S\,H - A_{dw} = 4 \cdot 3 - 1,6 = 10,4\,\mathrm{m}^2\,. \tag{3}$$

Powierzchnia okien:

$$A_{ok1} = 2\,A_{ok} = 2 \cdot 2 = 4\,\mathrm{m}^2\,, \tag{4}$$

$$A_{ok2} = A_{ok} = 2\,\mathrm{m}^2\,. \tag{5}$$

b) Część teoretyczna

Równania wymiany ciepła

$$
\begin{aligned}
Q &= \left(F_{z1}\, k_{sz} + A_{ok1}\, k_{ok} + A_{dz}\, k_{dz}\right) \left(T_1 - T_e\right) + \\
&+ \left(F_w\, k_{sw} + A_{dw}\, k_{dw}\right) \left(T_1 - T_2\right) ,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\left(F_w\, k_{sw} + A_{dw}\, k_{dw}\right) \left(T_1 - T_2\right) = \left(F_{z2}\, k_{sz} + A_{ok2}\, k_{ok}\right) \left(T_2 - T_e\right) .
\tag{7}
$$

Po przekształceniach:

$$
F_{z1} \left(T_1 - T_e\right) k_{sz} - \left(F_w\, k_{sw} + A_{dw}\, k_{dw}\right) T_2 =
\tag{8}
$$

$$
= \left(A_{ok1}\, k_{ok} + A_{dz}\, k_{dz}\right) T_e + Q - \left(A_{ok1}\, k_{ok} + A_{dz}\, k_{dz} + F_w\, k_{sw} + A_{dw}\, k_{dw}\right) T_1 ,
$$

$$
\begin{aligned}
&- F_{z2}\, k_{sz}\, T_2 + F_{z2}\, k_{sz}\, T_e - \left(A_{ok2}\, k_{ok} + F_w\, k_{sw} + A_{dw}\, k_{dw}\right) T_2 = \\
&= -A_{ok2}\, k_{ok}\, T_e - \left(F_w\, k_{sw} + A_{dw}\, k_{dw}\right) T_1 .
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Po wprowadzeniu dodatkowych oznaczeń zależności (8) i (9) można zapisać w postaci:

$$
A_1\, k_{sz} + B_1\, T_2 = C_1 ,
\tag{10}
$$

$$
A_2\, k_{sz}\, T_2 + B_2\, k_{sz} + C_2\, T_2 = D_2 ,
\tag{11}
$$

w którym:

$$
A_1 = F_{z1} \left(T_1 - T_e\right) ,
\tag{12}
$$

$$
B_1 = -\left(F_w\, k_{sw} + A_{dw}\, k_{dw}\right) ,
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \left(A_{ok1}\, k_{ok} + A_{dz}\, k_{dz}\right) T_e + \\
&+ Q - \left(A_{ok1}\, k_{ok} + A_{dz}\, k_{dz} + F_w\, k_{sw} + A_{dw}\, k_{dw}\right) T_1 ,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$
A_2 = -F_{z2} ,
\tag{15}
$$

$$
B_2 = F_{z2}\, T_e ,
\tag{16}
$$

$$
C_2 = -\left(A_{ok2}\, k_{ok} + F_w\, k_{sw} + A_{dw}\, k_{dw}\right) ,
\tag{17}
$$

$$
D_2 = -A_{ok2}\, k_{ok}\, T_e - \left(F_w\, k_{sw} + A_{dw}\, k_{dw}\right) T_1 .
\tag{18}
$$

Z równania (10) można obliczyć k_{sz}.

$$k_{sz} = \frac{C_1}{A_1} - \frac{B_1}{A_1} T_2 \, . \tag{19}$$

Podstawiając (19) do (11) i przekształcając jest:

$$\frac{-A_2 B_1}{A_1} T_2^2 + \left(\frac{A_2 C_1}{A_1} - \frac{B_1 B_2}{A_1} + C_2 \right) T_2 + \frac{B_2 C_1}{A_1} - D_2 = 0 \, . \tag{20}$$

Ponownie podstawiając:

$$\frac{-A_2 B_1}{A_1} = a \, , \tag{21}$$

$$\frac{A_2 C_1}{A_1} - \frac{B_1 B_2}{A_1} + C_2 = b \, , \tag{22}$$

$$\frac{B_2 C_1}{A_1} - D_2 = c \, , \tag{23}$$

można napisać:

$$a\, T_2^2 + b\, T_2 + c = 0 \, .$$

Temperatura w drugiej izbie jest zatem równa:

$$T_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\, a\, c}}{2\, a} \, ,$$

(drugie rozwiązanie jest nie fizyczne).

Współczynnik przenikania ciepła ściany zewnętrznej można obliczyć z równania (19). Znając, współczynnik k_{sz} opór przewodzenia ciepła ściany zewnętrznej jest równy:

$$R_{sz\lambda} = \frac{1}{k_{sz}} - \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \, . \tag{24}$$

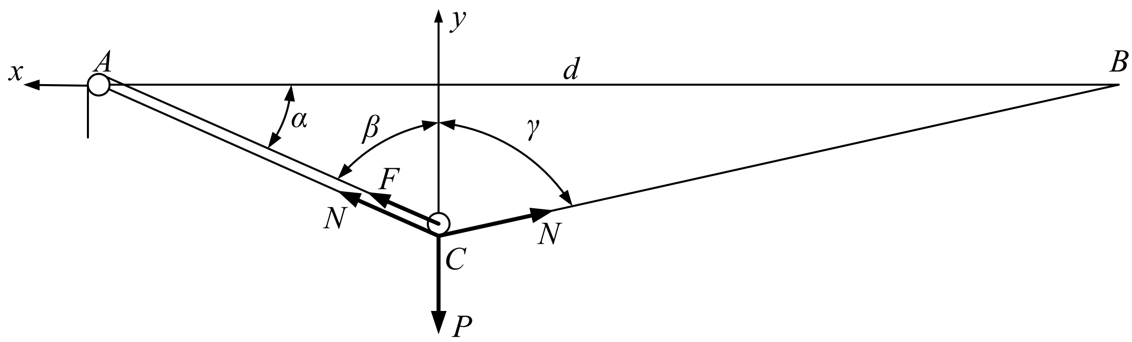
c) Część obliczeniowa

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 53 \cdot [20 - (7)] = 1431\ , \\
B_1 &= -(10,4 \cdot 1 + 1,6 \cdot 2) = -13,6\ , \\
C_1 &= (4 \cdot 0,9 + 3 \cdot 1,6) \cdot (-7) + 700 - (4 \cdot 0,9 + 3 \cdot 1,6 + 10,4 \cdot 1 + 1,6 \cdot 2) \cdot 20 = 201,2\ , \\
A_2 &= -58\ , \\
B_2 &= 58 \cdot (-7) = -406\ , \\
C_2 &= -(2 \cdot 0,9 + 10,4 \cdot 1 + 1,6 \cdot 2) = -15,4\ , \\
D_2 &= -2 \cdot 0,9 \cdot (-11) - (10,4 \cdot 1 + 1,6 \cdot 2) \cdot 20 = -259,4\ , \\
a &= -(-58) \cdot \frac{-13,6}{1431} = -0,5512\ , \\
b &= (-58) \cdot \frac{201,2}{1431} - (-406) \cdot -\frac{13,6}{1431} + (-15,4) = -27,41\ , \\
c &= -406 \cdot \frac{201,2}{1431} - 259,4 = 202,3\ , \\
T_2 &= \frac{-(-27,4) - \sqrt{(-27,4)^2 - 4 \cdot (-0,5512) \cdot 202,3}}{2 \cdot (-0.5512)} = 6,52^{\circ}\mathrm{C}\ , \\
k_{sz} &= \frac{201,2}{1431} - \frac{13,6}{1431} \cdot 6,52 = 0,203\ \mathrm{W/(m^2K)}\ , \\
R_{sz\lambda} &= \frac{1}{0,203} - \frac{1}{8} - \frac{1}{25} = 4,77\ \mathrm{m^2K/W}\ .
\end{aligned}
$$

Odpowiedź: Temperatura drugiego pomieszczenia $6,52^{\circ}$C, a współczynnik oporu przewodzenia ciepła ściany zewnętrznej $R_{sz\lambda} = 4,77\ \mathrm{m^2K/W}$.

Rozwiązanie zadania 3

Na rys.1 przedstawiono rozkład sił działających w punkcie C.



Rys.1. Rozkład sił działających w punkcie C

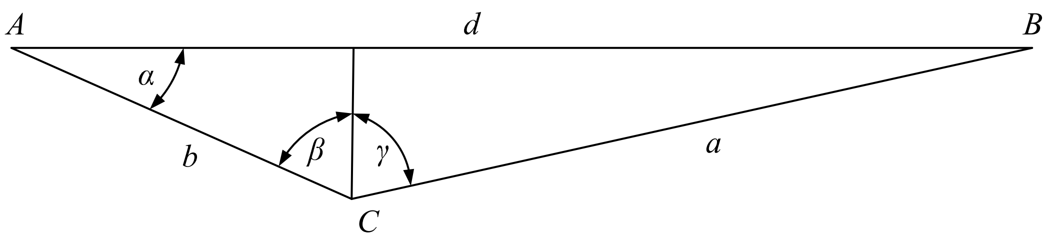
Suma rzutów sił na oś x:

$$(N + F)\ \sin\beta - N\ \sin\gamma = 0\ . \tag{1}$$

Suma rzutów sił na oś y:

$$(N + F)\ \cos\beta + N\ \cos\gamma - P = 0\ . \tag{2}$$

Do obliczenia kątów β i γ należy wykorzystać rysunek pomocniczy (rys.2).



Rys.2. Rysunek pomocniczy

Przyjmując oznaczenia $AC = b$ oraz $CB = a$ można napisać:

$$a + b = d + e \qquad ; \qquad b = d + e - a\ . \tag{3}$$

Z twierdzenia cosinusów:

$$a^2 = b^2 + d^2 - 2\, b\, d\ \cos\alpha\ , \tag{4}$$

$$a^2 = (d + e - a)^2 + d^2 - 2\,(d + e - a)\, d\ \cos\alpha\ , \tag{5}$$

$$a = \frac{(d+e)^2 + d^2 - 2\,(d+e)\, d\ \cos\alpha}{2\ (d+e) - 2\, d\ \cos\alpha}\ , \tag{6}$$

$$a = \frac{(120+3)^2 + 120^2 - 2\cdot(120+3)\cdot 120\cdot\cos 30^\circ}{2\cdot(120+3) - 2\cdot 120\cdot\cos 30^\circ} = 103,9\ \mathrm{m}\ . \tag{7}$$

Szukana odległość rolki C od punktu A jest równa b:

$$b = d + e - a - 120 + 3 - 103,9 = 19,1 \text{ m} . \tag{8}$$

Z twierdzenia sinusów, przy rozwartym kącie $(\beta + \gamma)$ można napisać:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin\left[180^\circ - (\beta + \gamma)\right]} . \tag{9}$$

Po przekształceniu

$$\sin\left[180^\circ - (\beta + \gamma)\right] = \frac{d}{a}\, \sin\alpha , \tag{10}$$

gdzie

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ . \tag{11}$$

Po podstawieniu danych:

$$\sin\left[180^\circ - (\beta + \gamma)\right] = \frac{120}{103,9}\, \sin 30^\circ = 0,5775 , \tag{12}$$

$$180 - (\beta + \gamma) = 35,27^\circ , \tag{13}$$

$$\beta + \gamma = 180^\circ - 35,27^\circ = 144,73^\circ \qquad ; \qquad \gamma = 144,73^\circ - 60^\circ = 84,73^\circ . \tag{14}$$

Na podstawie zależności (1):

$$F = N\, \frac{\sin\gamma - \sin\beta}{\sin\beta} = 0,15\, N . \tag{15}$$

Podstawiając zależność (15) do równania (2) można obliczyć siłę naciągu liny nośnej oraz siłę z jaką podciągana jest rolka C.

$$(N + 0,15\, N)\, \cos\beta + N\, \cos\gamma = P , \tag{16}$$

$$P = (N + 0,15\, N)\, \cos\beta - N\, \cos\gamma = 1,15\, N\, \cos 60^\circ - N\, \sin 84,73^\circ = 0,6668\, N , \tag{17}$$

$$N = \frac{P}{0,6668} = \frac{30000}{0,6668} = 45000 \text{ N} = 45 \text{ kN} , \tag{18}$$

$$F = 0,15\, N = 0,15 \cdot 45000 = 6700 \text{ N} = 6,7 \text{ kN} . \tag{19}$$

Odpowiedź: Odległość rolki od punktu A to $19,1$ m, siła naciągu w linie nośnej $N = 45$ kN oraz siła z jaką podciągana jest rolka $F = 6,7$ kN.