XLV OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

Zawody II stopnia

Rozwiązania zadań dla grupy mechaniczno-budowlanej

Rozwiązanie zadania 1

Sytuacja przed zmianą schematu statycznego belki (Rys.1a w treści zadania).

Maksymalna wartość momentu zginającego występuje w przekrojach utwierdzenia i jest równa:

$$M_A = M_B = -\frac{q_1\, l^2}{12} = -\frac{q_1 \cdot 10^2}{12} = -8,333\, q_1 \quad \Longrightarrow \quad \left| M_A \right| = \left| M_B \right| = 8,333\, q_1 \,. \tag{1}$$

Sytuacja po zmianie schematu statycznego belki (Rys.1b w treści zadania).

Maksymalna wartość zginającego momentu ujemnego wystąpi na podporze C i będzie równa:

$$M_C = -\frac{q_2\, x^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad \left| M_C \right| = \frac{q_2\, x^2}{2} \,. \tag{2}$$

Teraz trzeba wyprowadzić wzór na maksymalną wartość zginającego momentu dodatniego, który wystąpi w połowie przęsła CD.

Reakcja R_C będzie równa (suma momentów zginających względem punktu $D = 0$):

$$R_C\, l_2 - q_2 \left(l_2 + 2\, x \right) \frac{1}{2}\, l_2 = 0 \qquad \text{skąd:} \tag{3}$$

$$R_C = q_2 \left(\frac{l_2}{2} + x \right) \,. \tag{4}$$

Teraz możemy wyprowadzić wzór, z którego można wyznaczyć maksymalną wartości zginającego momentu dodatniego. Moment ten wystąpi w połowie rozpiętości przęsła CD.

$$M_{CDmax} = R_C\, \frac{1}{2}\, l_2 - q_2 \left(\frac{l_2}{2} + x \right) \frac{1}{2} \left(\frac{l_2}{2} + x \right) \,, \tag{5}$$

Organizatorem OWT jest Federacja Stowarzyszeń Naukowo-Technicznych NOT.
Olimpiada jest finansowana ze środków MEN.

skąd po przekształceniach otrzymuje się:

$$M_{CDmax} = \frac{q_2}{8} \left(l_2^2 - 4\, x^2 \right) \,. \tag{6}$$

Z warunków zadania powinno być:

$$\left| M_C \right| = \left| M_{CDmax} \right| \,. \tag{7}$$

Zatem przyrównując zależności (2) i (6) otrzymuje się:

$$\frac{q_2\, x^2}{2} = \frac{q_2}{8} \left(l_2^2 - 4\, x^2 \right) \,, \tag{8}$$

z którego wynika, że

$$x^2 = \frac{1}{8}\, l_2^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{1}{8}\, l_2^2} = 0,3535\, l_2 \,, \tag{9}$$

$$l_2 = l - 2\, x \,. \tag{10}$$

Zatem

$$x = 0,3535\, \left(l - 2\, x \right) \,. \tag{11}$$

Ostatecznie więc:

$$x = 10 \cdot \frac{0,3535}{1,7071} = 2,071 \text{ m}. \tag{12}$$

Czy zachowany jest warunek bezpieczeństwa podany w treści zadania, można sprawdzić podstawiając x do zależności (2) i (6).

$$\left| M_C \right| = \frac{q_2\, x^2}{12} = \frac{2\, q_1\, x^2}{12} = 2\, q_1\, \frac{2,071^2}{2} = 4,289\, q_1 \,, \tag{13}$$

$$\left| M_C \right| = 4,289\, q_1 \quad < \quad \left| M_A \right| = 8,333\, q_1 \,, \tag{14}$$

oraz

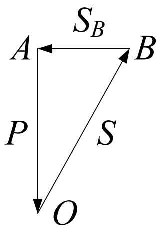
$$\begin{aligned} M_{CDmax} &= \frac{q_2}{8} \left(l_2^2 - 4\, x^2 \right) = \frac{2\, q_1}{8} \left((10 - 2 \cdot 2,2071)^2 - 4 \cdot 2,2071^2 \right) = \\ &= \left| M_C \right| = 4,289\, q_1 \,, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\left|M_{CDmax}\right| = 4,289\, q_1 \quad < \quad \left|M_A\right| = 8,333\, q_1\,. \tag{16}$$

<u>Odpowiedź</u>: Przyjęty warunek bezpieczeństwa jest spełniony.

Rozwiązanie zadania 2

Siły działające w punkcie B można wyznaczyć na podstawie rys.1, z trójkąta sił w kolumnie, dźwigarze i cięgle. Trójkąt ten jest podobny do trójkąta OAB (rysunek z zadania).



Rys.1. Rozkład sił w kolumnie, dźwigarze i cięgle

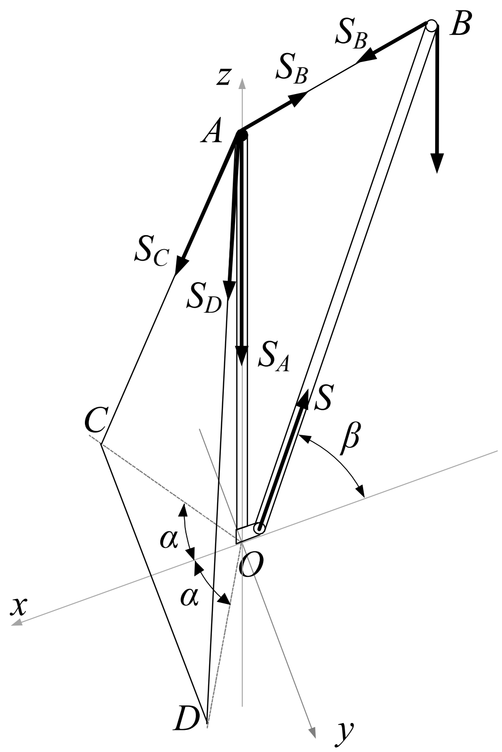
Długość boku AB oblicza się z twierdzenia cosinusów:

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2\,(OA)\,(OB)\,\cos\left(90^\circ - \beta\right) = h^2 + l^2 - 2\,h\,l\,\sin\beta = \\ &= 4 + 36 + 2\cdot 2\cdot 6\cdot \sin 75^\circ = 16,8 \qquad \Longrightarrow \qquad AB = 4,1\ \mathrm{m}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Z podobieństwa trójkąta OAB (rysunek z zadania) i trójkąta sił przyłożonych do punktu B można zapisać następujące związki:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{S_B}{P} \quad \Longrightarrow \quad S_B = P\,\frac{AB}{OA} = 15000\,\frac{4,1}{2} = 30750\ \mathrm{N}, \tag{2}$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{S}{P} \quad \Longrightarrow \quad S = P\,\frac{OB}{OA} = 15000\,\frac{6}{2} = 45000\ \mathrm{N}. \tag{3}$$



Rys.2. Rozkład sił w elementach dźwigu

Siły działające w punkcie A można obliczyć przyrównując do zera sumy poszczególnych rzutów sił na osie układu współrzędnych. Do tego konieczne jest wyliczenie kątów $BAO = \gamma$, $ACO = ADO = \delta$.

Kąt BAO oblicza się z twierdzenia sinusów:

$$\frac{AB}{\sin\left(90^\circ - \beta\right)} = \frac{OB}{\sin\left(180^\circ - \gamma\right)}\,, \tag{4}$$

$$\sin\left(180^\circ - \gamma\right) = \frac{OB}{AB}\cos\beta = \frac{6}{4,1}\cdot\cos 75^\circ = 0,3788\,, \tag{5}$$

$$180^\circ - \gamma = 22,26^\circ \quad\Longrightarrow\quad \gamma = 157,74^\circ\,, \tag{6}$$

$$\sin\delta = \frac{OA}{AC} = \frac{h}{b} = \frac{2}{3} = 0,6667 \quad\Longrightarrow\quad \delta = 41,80^\circ\,. \tag{7}$$

Składowe sił działających w punkcie A są odpowiednio równe:
Oś X

$$\begin{aligned} S_{Ax} &= 0; \qquad S_{Bx} = -S_B\cos\left(\gamma - 90^\circ\right); \\ S_{Cx} &= S_C\cos\delta\cos\alpha; \qquad S_{Dx} = S_D\cos\delta\cos\alpha\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Oś Y

$$\begin{aligned} S_{Ay} &= 0; \qquad S_{By} = 0; \\ S_{Cy} &= -S_C \cos\delta\, \sin\alpha; \qquad S_{Dy} = S_D \cos\delta\, \sin\alpha\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Oś Z

$$\begin{aligned} S_{Az} &= -S_A; \qquad S_{Bz} = S_B \sin\left(\gamma - 90^\circ\right); \\ S_{Cz} &= -S_C \sin\delta; \qquad S_{Dz} = -S_D \sin\delta\,. \end{aligned} \tag{10}$$

$$-S_B \cos\left(\gamma - 90^\circ\right) + S_C \cos\delta\, \cos\alpha + S_D \cos\delta\, \cos\alpha = 0\,. \tag{11}$$

Podstawiając $\delta = 41,80^\circ$

$$S_C + S_D = \frac{S_B \cos\left(\gamma - 90^\circ\right)}{\cos\delta\, \cos\alpha} = \frac{30750 \cdot \cos\left(157,74^\circ - 90^\circ\right)}{\cos\, 41,80^\circ \cdot \cos\, 30^\circ} = 18042,7\ \mathrm{N}, \tag{12}$$

$$-S_C \cos\delta\, \sin\alpha + S_D \cos\delta\, \sin\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad S_C = S_D = 9021,4\ \mathrm{N}, \tag{13}$$

$$-S_A + S_B \sin\left(\gamma - 90^\circ\right) - 2\, S_C \sin\delta = 0\,, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} S_A &= S_B \sin\left(\gamma - 90^\circ\right) - 2\, S_C \sin\delta = \\ &= 30750\, \sin 67,74^\circ - 2 \cdot 9021,3 \cdot \sin\, 41,80^\circ = 16432,4\ \mathrm{N}. \end{aligned} \tag{15}$$

<u>Odpowiedź:</u> $S = 45000$ N, $S_A = 16432,4$ N, $S_B = 30750$ N, $S_C = S_D = 9021,4$ N.

Rozwiązanie zadania 3

Ciśnienie powietrza w cylindrze:

$$p = p_0 + \frac{\left(m_t + m\right) g}{\pi \frac{d^2}{4}} = 1,343\ \text{bar}\,. \tag{1}$$

Masa powietrza:

$$m_p = \frac{p\,V_1}{R\,T}\,, \tag{2}$$

gdzie:

$$V_1 = \pi \frac{d^2}{4} h_1 = 0,0157\ \text{m}^3 \qquad T_1 = t_0 + 273 = 293\ \text{K}, \tag{3}$$

$$R = \frac{B}{M} = \frac{8315}{28,95} = 287,2\ \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})\,, \tag{4}$$

$$m_p = \frac{p\,V_1}{R\,T} = \frac{1,343 \cdot 10^5 \cdot 0,0157}{287,2 \cdot (20 + 273)} = 0,0251\ \text{kg}. \tag{5}$$

Objętość powietrza po podniesieniu przedmiotu:

$$V_2 = \pi \frac{d^2}{4} h_2 = 0,0236\ \text{m}^3\,. \tag{6}$$

Temperatura powietrza po ekspansji do V_2 – przemiana izobaryczna:

$$t_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} - 273 = 293 \cdot \frac{0,0236}{0,0157} - 273 = 167,4^\circ\,. \tag{7}$$

Energia wewnętrzna powietrza na początku procesu:

$$U_1 = m_p\,c_v\,T_1 = 0,0251 \cdot \frac{5}{2} \cdot 287,2 \cdot 293 = 5280,4\ \text{J}. \tag{8}$$

Energia wewnętrzna powietrza na końcu procesu:

$$U_2 = m_p \frac{5}{2} R\,T_2 = 7936,8\ \text{J}. \tag{9}$$

Praca wykonana przez gaz – praca zmiany objętości:

$$L = p\,\Delta\,V = 1,343 \cdot 10^5 \cdot (0,0236 - 0,0157) = 1055,2 \text{ J.} \tag{10}$$

Ciepło dostarczone za pośrednictwem grzałki, netto (niezbędne do realizacji procesu):

$$Q = \left(U_2 - U_1\right) + L = 3711,6 \text{ J.} \tag{11}$$

Całkowite ciepło wydzielone na grzałce:

$$Q_C = \frac{Q}{1-s} = \frac{3711,6}{1-0,3} = 5302,3 \text{ J.} \tag{12}$$

Moc grzałki z uwzględnieniem strat ciepła do otoczenia:

$$P_g = \frac{Q_C}{t} = \frac{5302,3}{10} = 530,2 \text{ W.} \tag{13}$$

Stopień konwersji ciepła na zmianę energii wewnętrznej i pracę zmiany objętości:

$$k_U = \frac{\Delta\,U}{Q} = \frac{7936,8 - 5280,4}{3711,6} = 0,716\,, \tag{14}$$

$$k_L = \frac{L}{Q} = \frac{1055,2}{3711,6} = 0,284\,. \tag{15}$$

Sprawność układu mechanicznego jest równa stosunkowi efektywniej pracy podnoszenia do całkowitej energii wydzielonej na grzałce:

$$\eta = \frac{m\,g\,\left(h_2 - h_1\right)}{Q_C} = \frac{100 \cdot 9,81 \cdot 0,25}{5302,3} = 0,0462 = 4,62\%\,. \tag{16}$$

Uwaga: Wielkość ta pomija ruch (zmiany energii potencjalnej) innych elementów instalacji mechanicznej. W podnośniku termo-pneumatycznym część pracy zmiany objętości jest zużywana na pokonanie sił pochodzących od ciśnienia otoczenia.

Odpowiedź: Stopień konwersji ciepła na zmianę energii wewnętrznej i pracę zmiany objętości powietrza w podnośniku są odpowiednio równe 0,716 i 0,284. Sprawność podnośnika mechanicznego jest mała i równa około 4,62%.

Rozwiązanie zadania z optymalizacji

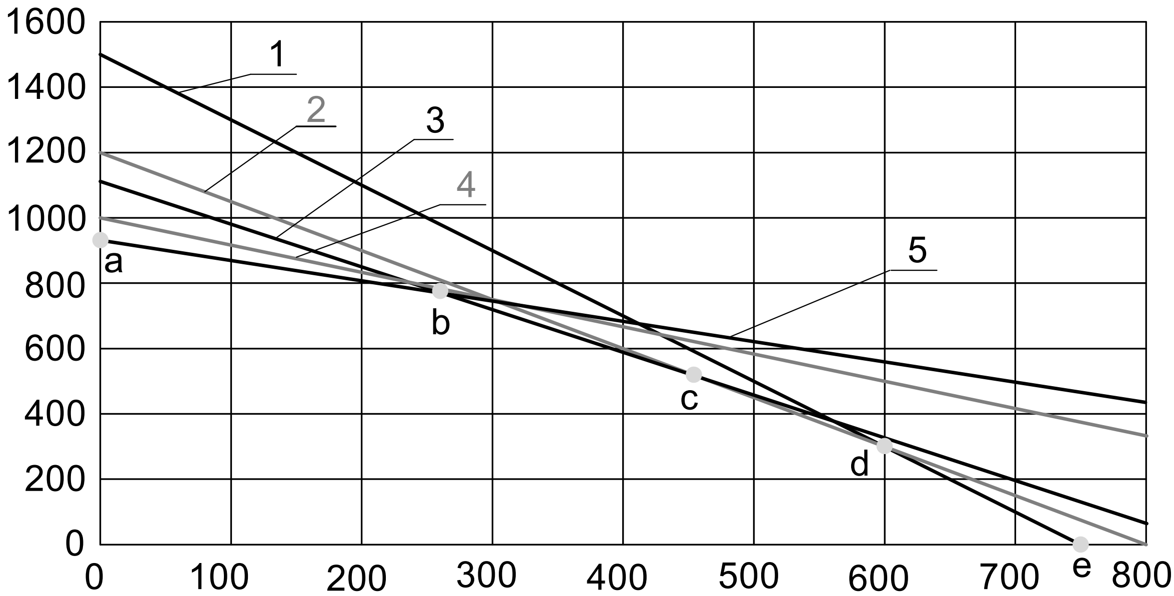
Oznaczenie: x – liczba urządzeń U1, y – liczba urządzeń U2.
Funkcja celu (maksymalny zysk):

$$F = 40 \cdot x + 52 \cdot y \, .$$

Ograniczenia:

$$\begin{aligned}
10 \cdot x + 5 \cdot y &\le 7500 & & 2 \cdot x + y \le 1500 \, , & (1)\\
6 \cdot x + 4 \cdot y &\le 4800 & & 3 \cdot x + 2 \cdot y \le 2400 \, , & (2)\\
8 \cdot x + 6 \cdot y &\le 6800 & \Rightarrow \quad & 4 \cdot x + 3 \cdot y \le 3400 \, , & (3)\\
25 \cdot x + 30 \cdot y &\le 30000 & & 5 \cdot x + 6 \cdot y \le 6000 \, , & (4)\\
100 \cdot x + 160 \cdot y &\le 150000 & & 5 \cdot x + 8 \cdot y \le 7500 \, . & (5)
\end{aligned}$$

Graficzne rozwiązanie tego układu nierówności przedstawiono na wykresie.



Rys.1. Graficzne rozwiązanie układu nierówności (1) – (5)

Obszar dopuszczalnych rozwiązań jest ograniczony polem pomiędzy łamaną (a), (b), (c), (d), (e) i osiami układu współrzędnych.

Następnie wyznaczamy współrzędne charakterystycznych punktów (a), (b), (c), (d):
Punkt (a) dla nierówności (5)

$$5 \cdot x + 8 \cdot y \le 7500 \, ,$$

można napisać równanie:

$$y = \frac{7500}{8} - \frac{5}{8} \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad x = 0, y = 937.$$

Punkt (b) dla układu nierówności (3) i (5)

$$4 \cdot x + 3 \cdot y \leq 3400\,,$$

$$5 \cdot x + 8 \cdot y \leq 7500\,,$$

można napisać układ równań:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3400}{3} - \frac{4}{3} \cdot x\,, \\ y &= \frac{7500}{8} - \frac{5}{8} \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad x = 277, y = 764. \end{aligned}$$

Punkt (c) dla układu nierówności (3) i (2)

$$4 \cdot x + 3 \cdot y \leq 3400\,,$$

$$3 \cdot x + 2 \cdot y \leq 2400\,,$$

można napisać układ równań:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3400}{3} - \frac{4}{3} \cdot x\,, \\ y &= \frac{2400}{2} - \frac{3}{2} \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad x = 400, y = 600 \end{aligned}$$

Punkt (d) dla układu nierówności (2) i (1)

$$\begin{aligned} 3 \cdot x + 2 \cdot y &\leq 2400\,, \\ 2 \cdot x + y &\leq 1500\,, \end{aligned}$$

można napisać układ równań:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2400}{2} - \frac{3}{2} \cdot x\,, \\ y &= 1500 - 2 \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad x = 600, y = 300 \end{aligned}$$

Zyski w poszczególnych punktach wykresu są następujące:
Punkt (a): $F(a) = 40 \cdot 0 + 52 \cdot 937 = 48724$ zł.
Punkt (b): $F(b) = 40 \cdot 277 + 52 \cdot 764 = 50808$ zł.
Punkt (c): $F(c) = 40 \cdot 400 + 52 \cdot 600 = 47200$ zł.
Punkt (d): $F(d) = 40 \cdot 600 + 52 \cdot 300 = 39600$ zł.

Odpowiedź: W punkcie (b) zysk 50808 zł jest zyskiem maksymalnym, aby go uzyskać należy wyprodukować 277 urządzeń U1 i 764 urządzeń U2.

Rozwiązanie zadania z zastosowania informatyki

Przykładowy algorytmy obliczeń

a) Kolejne kroki algorytmu obliczeń – płot w postaci wieloboku:

1. Z pliku *Osiedle.txt* wczytać wartości N i kolejne współrzędne położenia budynków.
2. Znaleźć punkt o najmniejszej wartości współrzędnej y.
   Punkt ten oznaczony indeksem 1 będzie stanowił początek ogrodzenia.
3. Wyznaczyć kąty, jakie tworzą z osią x wektory rozpoczynające się w punkcie 1 i kończące w kolejnych punktach.
4. Przesortować wartości kątów od najmniejszego do największego.
5. Punkt będący końcem wektora o najmniejszej wartości kąta stanowi 2 punkt ogrodzenia.
6. Wykonać w pętli kolejne procedury:
   (a) Wyznaczyć prostą zawierającą ostatni i przedostatni punkt należący do ogrodzenia,
   (b) Wyznaczyć kąty, jakie tworzą wektory rozpoczynające się w ostatnim punkcie ogrodzenia i kończące w kolejnych punktach,
   (c) Punkt będący końcem wektora o najmniejszej wartości kąta stanowi kolejny punkt ogrodzenia (np. 6),
   (d) Wyeliminować współrzędne wyznaczonego punktu w procedurze c (np. pkt. 6) ze zbioru współrzędnych,
   (e) Jeżeli współrzędne ostatnio wybranego punktu pokrywają się ze współrzędnymi punktu 1 przejść w programie do kroku 7.
7. Obliczyć długość ogrodzenia sumując odległości pomiędzy kolejnymi punktami ogrodzenia.

b) Kolejne kroki algorytmu obliczeń – płot w postaci okręgu:

1. Wykorzystując tablicę współrzędnych punktów należących do ogrodzenia obliczyć średnią wartość współrzędnych ich środka (punkt środkowy).
2. Obliczyć odległości punktów należących do ogrodzenia od punktu środkowego.
3. Największa ze zbioru odległości będzie promieniem poszukiwanego kolistego ogrodzenia.
4. Obliczyć długość tego okręgu.