XLV OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

Zawody II stopnia

Rozwiązania zadań dla grupy elektryczno-elektronicznej

Rozwiązanie zadania 1

Moc jednego elementu grzejnego, gdy trzy elementy są sprawne (odbiornik symetryczny) jest równa:

$$P_f = \frac{P}{3} = \frac{6}{3} = 2\,\mathrm{kW}. \tag{1}$$

Prąd jednej grzałki można obliczyć wiedząc, że grzałka jest w tym wypadku zasilana napięciem fazowym $U_{nf} = 230$ V:

$$I_f = \frac{P_f}{U_{nf}} = \frac{2000}{230} \approx 8,7\,\mathrm{A}. \tag{2}$$

Rezystancja jednego elementu grzejnego jest zatem równa:

$$R_f = \frac{U_{nf}}{I_f} = \frac{230}{8,7} = 26,45\,\Omega. \tag{3}$$

a) Wariant z przewodem neutralnym

Kiedy jest uszkodzony jeden element grzejny, grzeją dwa elementy i moc pieca jest równa:

$$P_1 = 2\,P_f = 2 \cdot 2 = 4\,\mathrm{kW}. \tag{4}$$

Kiedy są uszkodzone dwa elementy grzejne moc pieca jest równa:

$$P_2 = P_f = 2\,\mathrm{kW}. \tag{5}$$

Organizatorem OWT jest Federacja Stowarzyszeń Naukowo-Technicznych NOT.
Olimpiada jest finansowana ze środków MEN.

b) Wariant bez przewodu neutralnego

Kiedy jest uszkodzony jeden element grzejny dwa pozostałe elementy grzejne, połączone szeregowo, są zasilane napięciem przewodowym, a zatem moc pieca jest równa:

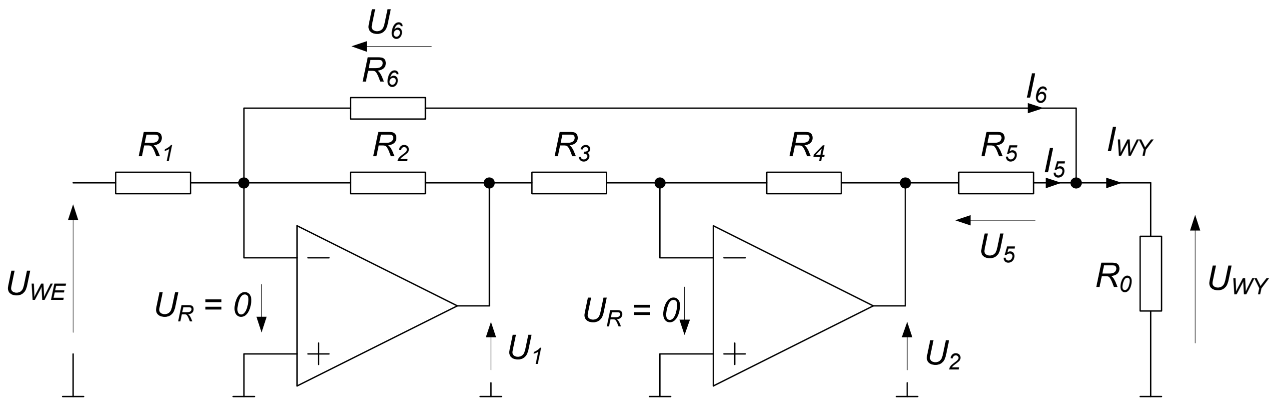
$$P_1 = \frac{U_{np}^2}{2\,R_f} = \frac{400^2}{2 \cdot 26,45} \approx 3\,\mathrm{kW}. \tag{6}$$

Kiedy są uszkodzone dowolne dwa z trzech elementów grzejnych, żaden element nie jest zasilany z sieci elektroenergetycznej, a zatem moc pieca jest równa 0.

$$P_2 = 0\,. \tag{7}$$

Odpowiedź: Kiedy jest uszkodzony jeden element grzejny moc pieca, w układzie z przewodem neutralnym, jest równa 4kW, a w układzie bez przewodu neutralnego 3kW. Kiedy są uszkodzone dowolne dwa z trzech elementów grzejnych moc pieca, w układzie z przewodem neutralnym, jest równa 2 kW, a w układzie bez przewodu neutralnego jest równa 0.

Rozwiązanie zadania 2



Rys.1. Źródło prądu stałego sterowane napięciem.

Przyjmując oznaczenia prądów i napięć jak na rys.1 napięcie U_1 na wyjściu pierwszego wzmacniacza można obliczyć z zależności:

$$U_1 = -\frac{R_2}{R_1}\,U_{WE} - \frac{R_2}{R_6}\,U_{WY}\,. \tag{1}$$

Napięcie U_2 na wyjściu drugiego wzmacniacza jest równe:

$$U_2 = -\frac{R_4}{R_3} U_1 \,. \tag{2}$$

Prąd wyjściowy układu jest równy:

$$I_{WY} = I_6 + I_5 = \frac{U_6}{R_6} + \frac{U_5}{R_5} \qquad \text{gdzie:} \quad U_5 = U_2 - U_{WY}, \quad U_6 = -U_{WY} \,. \tag{3}$$

Po przekształceniu zależności (1), (2) i wstawieniu U_2 do zależności (3) prąd wyjściowy jest równy:

$$\begin{aligned} I_{WY} &= -\frac{U_{WY}}{R_6} + \left(-\frac{1}{R_5}\frac{R_4}{R_3}\left(-\frac{R_2}{R_1}U_{WE} - \frac{R_2}{R_6}U_{WY}\right)\right) - \frac{U_{WY}}{R_5} = \\ &= -\frac{U_{WY}}{R_6} + \frac{U_{WE}}{R_5}\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1} + \frac{U_{WY}}{R_5}\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_6} - \frac{U_{WY}}{R_5} = \\ &= \frac{U_{WE}}{R_5}\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1} - \frac{U_{WY}}{R_6} + \frac{U_{WY}}{R_5}\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_6} - \frac{U_{WY}}{R_5} = \\ &= \frac{U_{WE}}{R_5}\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1} + \frac{U_{WY}}{R_5}\left(\frac{R_2}{R_3}\frac{R_4}{R_6} - \frac{R_5}{R_6} - 1\right) \,. \end{aligned} \tag{4}$$

Przedstawiony w zadaniu układ jest źródłem prądu sterowanym napięciem, jeżeli spełniony jest warunek:

$$\frac{R_2}{R_3}\frac{R_4}{R_6} - \frac{R_5}{R_6} - 1 = \frac{1}{R_6}\left(\frac{R_2 R_4}{R_3} - R_5 - R_6\right) = 0 \,. \tag{5}$$

Dla danych z zadania

$$\frac{R_2 R_4}{R_3} - R_5 - R_6 = \frac{2 \cdot 2}{2} - 1 - 1 = 0 \,. \tag{6}$$

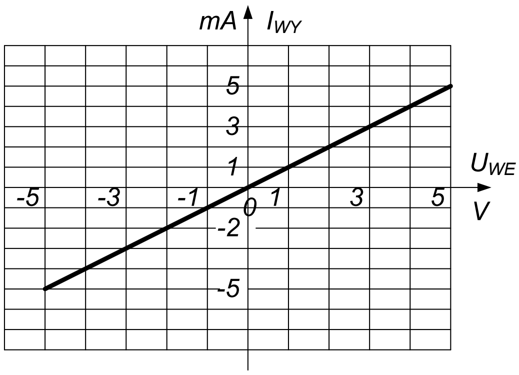
Zatem prąd wyjściowy jest funkcją napięcia sterującego zgodnie z zależnością:

$$I_{WY} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}\frac{U_{WE}}{R_5} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2}\frac{U_{WE}}{R_5} = \frac{U_{WE}}{R_5} \,. \tag{7}$$

Odpowiedź: Prąd wyjściowy źródła prądu jest równy

$$I_{WY} = \frac{R_2\, R_4}{R_1\, R_3}\, \frac{U_{WE}}{R_5}\,,$$

jeżeli jest spełniony warunek: $\dfrac{R_2\, R_4}{R_3} - R_5 - R_6 = 0$. Charakterystykę $I_{WY} = f\left(U_{WE}\right)$ układu przedstawiono na rys.2.



Rys. 2. Charakterystykę $I_{WY} = f\left(U_{WE}\right)$ źródło prądu stałego sterowane napięciem.

Rozwiązanie zadania 3

Prąd odbiornika i napięcie na jego zaciskach można obliczyć z zależności:

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{230}{0,575}} = 20 \text{ A}. \tag{1}$$

$$U = \sqrt{P\, R} = \sqrt{230 \cdot 0,575} = 11,5 \text{ V}. \tag{2}$$

Wiedząc, że prąd każdego ogniwa jest równy I/n, można napisać:

$$U = E - \frac{I}{n}\, R_W\,. \tag{3}$$

Po wstawieniu zależności (1), (2) do (3) i przekształceniu można liczba ogniw w baterii jest równa:

$$n = \frac{\sqrt{\dfrac{P}{R}}\, R_W}{E - \sqrt{P\, R}} = \frac{20 \cdot 0,2}{12 - 11,5} = 8\,. \tag{4}$$

Do obliczenia parametrów zastępczego źródła napięcia reprezentującego baterię akumulatorową można zastosować twierdzenie Thevenina. Siła elektromotoryczna zastępczego źródła ma w tym wypadku wartość $E_Z = E = 12$ V, natomiast zastępcza rezystancja wewnętrzna R_Z baterii jest równa:

$$R_Z = \frac{R_W}{n} = \frac{0,2}{8} = 0,025\,\Omega = 25\,\mathrm{m}\Omega\,. \tag{5}$$

Prąd zwarciowy pojedynczego ogniwa jest równy:

$$I_{Z1} = \frac{E}{R_W} = \frac{12}{0,2} = 60\ \mathrm{A}. \tag{6}$$

Prąd zwarciowy baterii akumulatorowej

$$I_Z = \frac{E}{R_Z} = \frac{12}{0,025} = 480\ \mathrm{A}. \tag{7}$$

Największą moc będzie miał odbiornik, którego rezystancja R_{opt} będzie równa rezystancji wewnętrznej baterii:

$$R_{opt} = R_Z = 25\,\mathrm{m}\Omega\,. \tag{8}$$

Moc tę można obliczyć z zależności:

$$P_{max} = \left(\frac{E}{R_Z + R_{opt}}\right)^2 R_{opt} = \left(\frac{12}{0,025 + 0,025}\right)^2 \cdot 0,025 = 1440\ \mathrm{W}. \tag{9}$$

Odpowiedź: Bateria akumulatorowa składa się z ośmiu ogniw. Prąd zwarciowy pojedynczego ogniwa jest równy 60 A, całej baterii 480 A. Kiedy rezystancja odbiornika jest równa rezystancji wewnętrznej baterii akumulatorowej $R_Z = R_{opt} = 25\,\mathrm{m}\Omega$ to moc odbiornika jest maksymalna i równa 1440 W.

Rozwiązanie zadania z optymalizacji

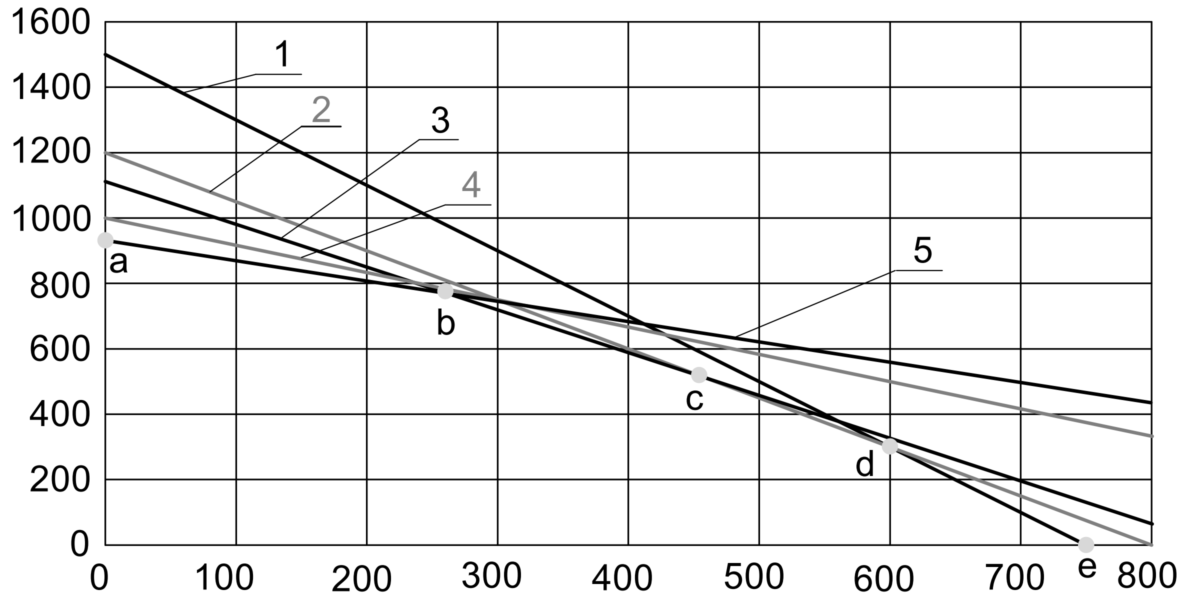
Oznaczenie: x – liczba urządzeń U1, y – liczba urządzeń U2.
Funkcja celu (maksymalny zysk):

$$F = 40 \cdot x + 52 \cdot y \ .$$

Ograniczenia:

$$\begin{array}{rcll} 10 \cdot x + 5 \cdot y \le 7500 & & 2 \cdot x + y \le 1500 \ , & (1) \\ 6 \cdot x + 4 \cdot y \le 4800 & & 3 \cdot x + 2 \cdot y \le 2400 \ , & (2) \\ 8 \cdot x + 6 \cdot y \le 6800 & \Rightarrow & 4 \cdot x + 3 \cdot y \le 3400 \ , & (3) \\ 25 \cdot x + 30 \cdot y \le 30000 & & 5 \cdot x + 6 \cdot y \le 6000 \ , & (4) \\ 100 \cdot x + 160 \cdot y \le 150000 & & 5 \cdot x + 8 \cdot y \le 7500 \ . & (5) \end{array}$$

Graficzne rozwiązanie tego układu nierówności przedstawiono na wykresie.



Rys.1. Graficzne rozwiązanie układu nierówności (1) – (5)

Obszar dopuszczalnych rozwiązań jest ograniczony polem pomiędzy łamaną (a), (b), (c), (d), (e) i osiami układu współrzędnych.

Następnie wyznaczamy współrzędne charakterystycznych punktów (a), (b), (c), (d):
Punkt (a) dla nierówności (5)

$$5 \cdot x + 8 \cdot y \le 7500 \ ,$$

można napisać równanie:

$$y = \frac{7500}{8} - \frac{5}{8} \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad x = 0, y = 937.$$

Punkt (b) dla układu nierówności (3) i (5)

$$4 \cdot x + 3 \cdot y \leq 3400\ ,$$

$$5 \cdot x + 8 \cdot y \leq 7500\ ,$$

można napisać układ równań:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3400}{3} - \frac{4}{3} \cdot x\ , \\ y &= \frac{7500}{8} - \frac{5}{8} \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad x = 277, y = 764. \end{aligned}$$

Punkt (c) dla układu nierówności (3) i (2)

$$4 \cdot x + 3 \cdot y \leq 3400\ ,$$

$$3 \cdot x + 2 \cdot y \leq 2400\ ,$$

można napisać układ równań:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3400}{3} - \frac{4}{3} \cdot x\ , \\ y &= \frac{2400}{2} - \frac{3}{2} \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad x = 400, y = 600 \end{aligned}$$

Punkt (d) dla układu nierówności (2) i (1)

$$\begin{aligned} 3 \cdot x + 2 \cdot y &\leq 2400\ , \\ 2 \cdot x + y &\leq 1500\ , \end{aligned}$$

można napisać układ równań:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2400}{2} - \frac{3}{2} \cdot x\ , \\ y &= 1500 - 2 \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad x = 600, y = 300 \end{aligned}$$

Zyski w poszczególnych punktach wykresu są następujące:
Punkt (a): $F(a) = 40 \cdot 0 + 52 \cdot 937 = 48724$ zł.
Punkt (b): $F(b) = 40 \cdot 277 + 52 \cdot 764 = 50808$ zł.
Punkt (c): $F(c) = 40 \cdot 400 + 52 \cdot 600 = 47200$ zł.
Punkt (d): $F(d) = 40 \cdot 600 + 52 \cdot 300 = 39600$ zł.

Odpowiedź: W punkcie (b) zysk 50808 zł jest zyskiem maksymalnym, aby go uzyskać należy wyprodukować 277 urządzeń U1 i 764 urządzeń U2.

Rozwiązanie zadania z zastosowania informatyki

Przykładowy algorytmy obliczeń

a) Kolejne kroki algorytmu obliczeń – płot w postaci wieloboku:

1. Z pliku *Osiedle.txt* wczytać wartości N i kolejne współrzędne położenia budynków.
2. Znaleźć punkt o najmniejszej wartości współrzędnej y.
   Punkt ten oznaczony indeksem 1 będzie stanowił początek ogrodzenia.
3. Wyznaczyć kąty, jakie tworzą z osią x wektory rozpoczynające się w punkcie 1 i kończące w kolejnych punktach.
4. Przesortować wartości kątów od najmniejszego do największego.
5. Punkt będący końcem wektora o najmniejszej wartości kąta stanowi 2 punkt ogrodzenia.
6. Wykonać w pętli kolejne procedury:
   (a) Wyznaczyć prostą zawierającą ostatni i przedostatni punkt należący do ogrodzenia,
   (b) Wyznaczyć kąty, jakie tworzą wektory rozpoczynające się w ostatnim punkcie ogrodzenia i kończące w kolejnych punktach,
   (c) Punkt będący końcem wektora o najmniejszej wartości kąta stanowi kolejny punkt ogrodzenia (np. 6),
   (d) Wyeliminować współrzędne wyznaczonego punktu w procedurze c (np. pkt. 6) ze zbioru współrzędnych,
   (e) Jeżeli współrzędne ostatnio wybranego punktu pokrywają się ze współrzędnymi punktu 1 przejść w programie do kroku 7.
7. Obliczyć długość ogrodzenia sumując odległości pomiędzy kolejnymi punktami ogrodzenia.

b) Kolejne kroki algorytmu obliczeń – płot w postaci okręgu:

1. Wykorzystując tablicę współrzędnych punktów należących do ogrodzenia obliczyć średnią wartość współrzędnych ich środka (punkt środkowy).
2. Obliczyć odległości punktów należących do ogrodzenia od punktu środkowego.
3. Największa ze zbioru odległości będzie promieniem poszukiwanego kolistego ogrodzenia.
4. Obliczyć długość tego okręgu.